ЛЕКЦІИ

АЛГЕБРИЧЕСКАГО И ТРАНСЦЕНДЕНТНАГО

АНАЛИЗА.

ЧИТАННЫЯ

въ Морскомъ Кадетскомъ Корпусѣ

АКАДЕМИКОМЪ ***Остроградскимъ.***

СОСТАВЛЕНЫ

КОРП. КОРАБ. ИНЖ. КАП. *С. Бурачкомъ*

И

ЛЕЙТЕНАНТОМЪ *С. Зеленымъ.*

ПЕРВЫЙ ГОДЪ.

(начаты 16 Октября 1836).

С. ПЕТЕРБУРГЪ.

Печатано въ Типографіи Конрада Вингебера.

1837.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по отпечатаніи представлены были въ Цензурный Комитетъ три экземпляра. С. Петербургъ, 7. Января 1837.

Ценсоръ *С. Куторга.*

ЕГО ИМПЕРАТОРСКОМУ ВЫСОЧЕСТВУ

ГЕНЕРАЛЪ-АДМИРАЛУ,

ГОСУДАРЮ,

ВЕЛИКОМУ КНЯЗЮ

КОНСТАНТИНУ НИКОЛАЕВИЧУ.

Съ глубочайшимъ высокопочитанiемъ посвящаютъ преданнѣйшiе

Степанъ Бурачекъ.
Семенъ Зеленой.

АНАЛИЗЪ

АЛГЕБРИЧЕСКІЙ.

ЧАСТЬ I.

РѢШЕНІЕ

АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ.

Издатели считаютъ за необходимое, объясниться на счетъ цѣли составленія этой книги, средствъ, имъ представившихся, и успѣха, котораго читатель вправѣ ожидать отъ нихъ.

Г. Остроградскій, убѣжденный многими любителями Анализа, согласился открыть чтеніе публичныхъ лекцій. Просвѣщенное Морское Начальство предоставило ему всѣ къ этому удобства въ Морскомъ Корпусѣ. 60 постоянныхъ слушателей, — порукой, какъ важно и занимательно это чтеніе нашего Геометра, за котораго, впрочемъ, давно уже поручилась вся ученая Европа, съ лестными отзывами принимающая все, что выходитъ изъ подъ пера его.

Настоящая цѣль этихъ лекцій есть Трансцендентный Анализъ, или Интегральное исчисленіе въ нынѣшнемъ его состояніи, въ особенности разширенное открытіями Г. Остроградскаго, съ приложеніемъ къ различнымъ важнѣйшимъ вопросамъ Механики земной и небесной, Физики, исчисленія Вѣроятностей, и проч., однимъ словомъ то, чего или вовсе нельзя найти въ книгахъ, или хотя и есть иное, разбросанное въ журналахъ, мемуарахъ; но не всѣ знаютъ гдѣ и что найти, не всѣмъ можно достать, не всякой безъ посторонниxъ объясненій то пойметъ.

Всѣ тѣ, которые знакомы съ Трансцендентнымъ Анализомъ, согласятся, что онъ одинъ не вмѣстится въ годичный курсъ, не говоря о приложеніяхъ. И такъ дѣло идетъ о нѣсколькихъ годичныхъ курсахъ, если только будутъ желающіе слушать, въ чемъ, по примѣру нынѣшняго, нельзя и сомнѣваться.

Если бы Г. Остроградскій началъ прямо съ Интегральнаго исчисленія, — дѣло не обошлось бы безъ жалобъ, что его „понимать нельзя;“ но конечно не онъ бы былъ причиной. Незная хорошо высшей Алгебры, нельзя понимать Интегральное исчисленіе. Судя по Русскимъ печатнымъ книгамъ, у насъ вообще и Алгебрическій Анализъ очень слабъ, не говоря уже, что онъ очень далекъ отъ того состоянія, въ какое поставилъ его и излагаетъ нашъ Геометръ. И такъ, чтобъ поровнять познанія всѣхъ своихъ слушателей, вывести ихъ на одинъ, ближайшій къ цѣли путь, и сдѣлать себя понятнымъ, онъ рѣшился прочесть нѣкоторыя, существенно необходимыя для переду, статьи Алгебрич. Анализа, большою частію служащія продолженіемъ того, что уже извѣстно на Русскомъ языкѣ.

Было бы очень жаль, еслибъ такое драгоцѣнное чтеніе ограничилось только личными слушателями, оставалось только въ ихъ памяти, всегда невѣрной, въ ихъ летучихъ замѣткахъ, іероглифическій смыслъ которыхъ, черезъ недѣлю можетъ быть потерянъ; а для тѣхъ Русскихъ любителей Анализа, которымъ отдаленіе или обстоятельства помѣшали участвовать лично, это чтеніе — все равно, какъ бы его вовсе не было.

Мы такъ счастливы, что слабыми своими силами, при помощи Г. Остроградскаго, сколько позволяли его малые досуги, и необходимость поспѣшнаго печатанія, — были въ состояніи до сихъ поръ слѣдить за его чтеніемъ, приводить въ порядокъ и представить читателямъ первую часть его лекцій.

Нѣтъ сомнѣнія, что тѣ же лекціи были бы несравненно превосходнѣе, если бы Г. Остроградскій самъ ихъ написалъ; но этого никогда мы не дождемся: онъ готовитъ для насъ монументальное произведеніе — Аналитическую Механику, доведенную имъ до высокой степени общности и простоты; передъ нимъ еще необозримое поле Высшаго Анализа и его безчисленныхъ приложеній къ важнѣйшимъ истинамъ, до сихъ поръ еще нетронутымъ, куда не многіе даже и дорогу знаютъ, — тамъ ему работа; довольно съ насъ, что онъ удѣляетъ нѣсколько часовъ на эти лекціи, которыя необходимы для того, чтобъ въ послѣдствіи понимать его, понимать современныхъ и прежнихъ Геометровъ.

Нѣтъ сомнѣнія, что тѣмъ же самымъ лекціямъ, которыя теперь предлагаемъ, можно бы придать больше системы, ясности, гораздо лучше и полнѣе обработать, еслибъ отложить изданіе на годъ, на два; но въ такомъ случаѣ его не было бы „теперь"; читатели неимѣли бы даже идеи о томъ, въ чемъ лекціи состояли; а черезъ годъ, черезъ два, нельзя ручаться, могло изданіе вытти еще хуже, могло быть и совсѣмъ оставлено. Съ другой стороны, это изданіе не есть сжатый элементарный курсъ для начинающихъ, но собственно, — бѣсѣды Геометра съ любителями Анализа, бѣсѣды по своей ясности и простотѣ, доступныя, конечно, и для того, кто слушалъ только элементарный курсъ, а главное: они знакомятъ съ мастерствомъ пріемовъ, съ духомъ, средствами и цѣлью Анализа, съ общими методами, трудами великихъ умовъ, постепенно вводятъ каждаго въ самую глубину науки, дѣлаютъ понятнымъ все объ ней писанное, расширяютъ тотъ горизонтъ, который элементарные курсы, — какъ они впрочемъ ни полезны, — по необходимости стѣсняютъ до того, что за его предѣлами представляется совершенная пустота и мракъ, тогда какъ тамъ-то и свѣтъ и полнота, и только тамъ познается вся цѣна, вся сила, вся польза и важность Анализа. Эти бѣсѣды снимаютъ то густое покрывало, которое по общему сознанію, элементарные же курсы, набрасывая на свой предметъ, закрываютъ всѣ его важнѣйшія приложенія, указываютъ только на одни головоломные труды, ни чемъ будто бы не оплачиваемые, ни къ чему не ведущіе въ практическомъ быту, невольно пугаютъ, разгоняютъ своихъ слушателей, дѣлаютъ изъ нихъ только неумолимыхъ, всегда впрочемъ неправыхъ судей, представляютъ высшій Анализъ или безполезнымъ, или ужаснымъ, доступнымъ только для избраннѣйшихъ, требующимъ головы, покрайнѣй мѣрѣ, — не человѣческой.

Ничего не бывало. Ни одна наука такъ не нужна, — объ этомъ послѣ — такъ не проста, такъ не обща, какъ Анализъ, потому что въ немъ: неразрывная цѣпь чистыхъ истинъ, нѣтъ мѣста произволу, ипотезамъ, больше или меньше наводняющимъ и затемняющимъ всѣ другія науки, — только бы мастеръ взялся выстроить аналитическую лесницу. Самая высшая ступенька ея отличается отъ самой нижней только тѣмъ, что до нее, какъ и на всякой лесницѣ, надо перейти сперва промежуточныя ступеньки. Эти бѣсѣды точно такая лесница. Такой недоставало, нѣтъ еще ни на одномъ языкѣ, тѣмъ болѣе у насъ. Какъ не пожелать, чтобъ она была кончена, какъ начата въ Россіи.

Чувствуемъ, какую мы взяли на себя отвѣтственность, вызвавшись быть издателями лекцій Г. Остроградскаго; но мы разсуждали объ этомъ иначе: если наше изданіе будетъ хотя нѣсколько порядочное, то оно все въ тысячу кратъ лучше, чѣмъ — ничего; и многіе конечно намъ будутъ благодарны, особливо, кто станетъ читать для того, чтобъ „узнать,“ а не для того, чтобъ только блеснуть своимъ критическомъ даромъ, выхватить на удачу двѣ - три фразы, и не понявши ихъ, разбранить всю книгу. La critique (de cette sorte) est aisée, mais l'art est difficile. Мы чувствовали, что нашихъ силъ, прилежанія, трудовъ и совѣсти достанетъ, — и вотъ первый опытъ представляется на употребленіе и пользу благонамѣреннаго читателя.

Мы не станемъ повторять оглавленія этой части: кто захочетъ, самъ прочтетъ и оцѣнитъ матеріялы въ ней собранные. Скажемъ только, что хотя эта часть болѣе другихъ знакома Русскимъ, однако и въ ней очень много вещей, извѣстныхъ у насъ очень не многимъ; а есть вещи, и очень важныя, которыя „для всѣхъ“ являются въ первой разъ. Опытный читатель это самъ увидитъ. Мы предоставляемъ себѣ, во второй или можетъ быть послѣдней части, — ихъ будетъ четыре, — сдѣлать полный обзоръ годичнаго курса и тѣмъ услугамъ, которыя Г. Остроградскій оказалъ Анализу, и особенно Русскому.

Объяснивши *цѣль* нашихъ трудовъ, скажемъ нѣсколько словъ и о *средствахъ*, которыя имѣли мы для достиженія этой, очень трудной цѣли, и объ *успѣхѣ,* который, между прочимъ, всегда „пропорціоналенъ“ средствамъ.

Летучія замѣтки во время чтенія, вниманіе и память, развлекаемыя необходимостью слушать, вглядываться, ловить и все записывать, — вотъ всѣ наши матеріяльные средства.

Кто испыталъ, тотъ пойметъ, какъ это далеко отъ „досужаго“ перевода: можно переводить и не понимая, какъ и бываетъ; здѣсь надобно ясно понять, чтобъ ясно передать, но понятъ наскоро. Этого нельзя сравнить нѣкоторымъ образомъ и съ досужнымъ сочиненіемъ: тамъ каждый властенъ написать только то, что знаетъ, тогда, когда захочетъ, незамѣтно ускользнуть отъ того, чего не знаетъ; здѣсь Редакторъ совершенный рабъ преподавателя: 60 свидѣтелей уличатъ его, когда онъ исказитъ или пропуститъ что либо, особливо трудное и важное. Мы многое прибавили, но ничего не пропустили.

Нельзя намъ было держаться другихъ писателей, кромѣ развѣ въ статьяхъ слишкомъ общихъ. Г-нъ Остроградскій, можно сказать импровизировалъ: если онъ и предлагалъ наприм. теоремы другихъ Геометровъ, то непремѣнно своимъ пріемомъ, въ новомъ свѣтѣ, ясности, простотѣ и улучшеніи. Когда случалось ему повторять прочитанное, то это повтореніе не походило уже на прежнее. Постороннія руководства тутъ ни къ чему намъ не послужили.

Г. Остроградскій читалъ всегда много, это видно по полнотѣ лекцій. Сохранить ту зрѣлость разсужденій, то мастерство разсказа, ту ясность и точность выраженій, которыя особенно отличаютъ нашего Геометра, какъ человѣка владѣющаго вполнѣ своимъ предметомъ, — небыло возможности: мы замѣнили ихъ своими, и не ручаемся за ихъ „сравнительное" достоинство; довольно, если мы не теряли, такъ выразимся, эскиза его мыслей, сущности дѣла: и за это мы ручаемся.

Каждую недѣлю читаются двѣ лекціи, даже и въ праздничные дни. Въ ту же ночь, пока все еще въ свѣжей памяти, іероглифическія безпорядочныя замѣтки, на двѣ руки, переводятся на подробное изложеніе, потомъ оба изложенія сводятся вмѣстѣ, округляются, дополняются; въ случаѣ недоумѣній мы обращались къ Г. Остроградскому. Такимъ образомъ каждую недѣлю готовятся двѣ лекціи въ чернѣ.

Мы предположили каждую недѣлю два листа выпускать изъ печати, и слѣдств. двѣ лекціи оригинала готовить начисто; но случалось, что передѣлка одной лекціи продолжалась недѣлю и больше; въ тоже время по пяти корректуръ на каждый листъ; и не смотря на эту поспѣшность, только развѣ къ концу года окончится весь курсъ. Но опять съ такою поспѣшностью нельзя ни требобовать, ни ручаться, чтобъ все было превосходно, совершенно. Совершенство есть функція не однихъ талантовъ, знанія дѣла, но и времени, и большаго досуга; его-то у насъ и не было; намъ нѣкогда было выжидать вдохновенія, и очень часто приходилось работать насильно, противъ расположенія, писать то и такъ, какъ писалось, а не такъ, какъ бы могли.

Мы употребили все, что отъ насъ зависѣло, только бы выполнить превосходнѣе: ничего не позволяли себѣ дѣлать кое-какъ, неразъ бросали совсѣмъ готовые печатные листы, когда усматривали, что можно ихъ обдѣлать лучше; нещадили своего времени, трудовъ и самолюбія: совѣтовались, прочитывали Г. Остроградскому свои рукописи, даже корректурные листы, поправляли, по нѣскольку разъ передѣлывали одно и тоже.

Но съ одной стороны недосуги Г. Остроградскаго, съ другой типографія, были причиною, что нѣкоторые листы *) выпущены безъ его просмотра даже въ рукописи. Случалось, иныя мѣста и послѣ его просмотра, прибавляли, убавляли, передѣлывали корректурѣ. Всего болѣе мы старались быть ясными; но опять и ясность — дѣло слишкомъ относительное: какъ бы ясно Анализъ изложенъ ни былъ, все чтеніе его, не отдыхъ, а работа, легкая или трудная, смотря потому, сколько кто „подготовленъ." — Немножко

---

*) Именно: 7, 13, 14, 16, 17, и 19.

вниманія, немножко терпѣнія, еще вниманія, и еще терпѣнья, — и мы надѣемся быть ясными.

Въ нѣкоторыхъ лекціяхъ, избѣгая скачковъ изложенія, мы сочли за полезное прибавить для большей ясности то, что Г. Остроградскій, сообразуясь съ большинствомъ своихъ слушателей, не находилъ за нужное читать. Иныя теоремы, изъ одной лекціи перенесены въ другія, потому что они читаны были тамъ, гдѣ тотчасъ требовалось употребленіе ихъ, чтобы для слушателей было яснѣе. Издатели ихъ помѣстили тамъ, гдѣ они легче доказывались, и вмѣстѣ съ другими составляли одну цѣпь. Отъ этого нѣкоторыя лекціи стали гораздо больше, чѣмъ они были въ самомъ дѣлѣ, другія вовсе уничтожились. Такимъ образомъ рѣшеніе уравненій было прочтено въ XV. лекцій, а напечатано въ XIII., двѣ лекціи разбились по другимъ; взамѣнъ одной изъ нихъ XIV-ю прибавили мы сами.

Нѣкоторыя лекціи, съ вѣдома и безъ вѣдома Г. Остроградскаго, изложены не въ томъ видѣ, и не такъ, какъ были читаны, потому что въ Анализѣ много есть вещей, которыхъ письменно нельзя — такъ намъ кажется, — изложить точно тѣмъ же образомъ, какъ они читаются изустно; здѣсь наглядность, перестановка формулъ, буквъ, живые слова и самые жесты придаютъ особую ясность; здѣсь можно просто указать, стереть, снова написать, сблизить результаты, можно видѣть, что кого затрудняетъ, и выяснить самыя трудныя мѣста; опять здѣсь все изложеніе передъ глазами, умъ легко, однимъ взглядомъ обнимаетъ подробности, все это до чрезвычайности облегчаетъ и сокращаетъ изложеніе; напротивъ, оно всего этого лишается на мертвыхъ словахъ, на письмѣ: тутъ слѣдовало пріискивать другой пріемъ.

Надѣемся, что читатель, не вполнѣ еще знакомый съ Анализомъ, которому что либо покажется неяснымъ, вину неясности, при первомъ чтеніи, раздѣлитъ по-поламъ, и половину передастъ своему нетерпѣнію, или нехотѣнію вникнуть хорошенько въ новый для него предметъ.

Тамъ, гдѣ Г. Остроградскій разсматривалъ одинъ только случай, какого либо вопроса, мы сочли за нужное коснуться вкратцѣ всѣхъ остальныхъ, и ничего не оставлять не поясня примѣромъ.

Книга эта необходима для объясненія и ссылокъ въ будущемъ курсѣ; и при всѣхъ возможныхъ недостаткахъ, какіе только угодно будетъ, кому либо, приписать ей, — она все таки, относительно существенныхъ матеріяловъ, какъ уже сказали, останется книгою драгоцѣнною и нужною для Русскихъ, и судя по тѣснымъ условіямъ, при которыхъ составляется, и той цѣли, для которой издается, она — внѣ всякой мѣлочной критики; благонамѣренныя замѣчанія примутся съ благодарностію. Впрочемъ не только важныя ошибки, — смѣемъ думать ихъ не найдется, — но и маловажные промахи, какіе только по времени откроются, издатели сами, по окончаніи курса, оговорятъ и исправятъ въ особыхъ прибавленіяхъ, на всякой случай, чтобы неопытнаго читателя не ввести и въ самомалѣйшее аналитическое заблужденіе.

Наконецъ покорнѣйше просимъ Гг. критиковъ, въ нынѣшнемъ смыслѣ этого слова, всѣ свои неудовольствія, замѣтки и претензіи на эту книгу, адресовать прямо на имя Редакціи, и ни въ какомъ случаѣ, ни подъ какимъ видомъ, ничего не относить къ лицу Г. Остроградскаго, кромѣ одной благодарности, которую мы, съ своей стороны, считаемъ первѣйшею обязаностію изъявить ему здѣсь, за всѣ его безвозмездные труды, поправки и совѣты, намъ оказанные, единственно по любви его къ своей наукѣ.

Оглавленіе первой части.

ЛЕКЦІЯ I.

Предварительныя теоремы.

Стран.

ЛЕКЦІЯ II.

Общій видъ корней раціональныхъ функцій.

ЛЕКЦІЯ III.

Разложеніе раціональныхъ функцій на линейные множители.

ЛЕКЦІЯ IV.

Способъ Штурмовъ.

Отдѣленіе корней.

ЛЕКЦІЯ V.

Свойства производныхъ функцій.

ЛЕКЦІЯ VI.

Свойства производныхъ функцій.

(Продолженіе.)

ЛЕКЦІЯ VII.

Способъ Фурье.

ЛЕКЦІЯ VIII.

Отдѣленіе корней.

(Продолженіе.)

ЛЕКЦІЯ IX.

Отдѣленіе и вычисленіе корней

ЛЕКЦІЯ X.

Вычисленіе корней.

(Продолженіе.)

ЛЕКЦІЯ XI.

Вычисленіе корней.

Линейное приближеніе.

РѢШЕНІЕ АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ.

ЛЕКЦІЯ I.

Предварительныя теоремы.

Математическій Анализъ въ самомъ обширномъ смыслѣ раздѣляется на три части:

1) Алгебраическій Анализъ — Алгебра, или ученіе о Алгебрическихъ функціяхъ.

2) Теорія чиселъ.

3) Трансцендентный Анализъ.

Алгебрическою функціею одного или нѣсколькихъ количествъ называется совокупленіе ихъ, чрезъ конечное число Алгебрическихъ дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени, извлеченіе корней и рѣшеніе уравненій. Всѣ они, кромѣ послѣдняго, излагаются въ элементарныхъ курсахъ, и потому предполагаемъ, что ихъ знаки, свойства и подробности намъ извѣстны.

Ежели функція содержитъ въ себѣ только сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, то она называется *раціональною* или соизмѣримою функціею; а самыя дѣйствія будемъ называть *раціональными* или элементарными.

Если же въ нее входятъ два остальныя дѣйствія: извлеченіе корней и рѣшеніе уравненій, то функція называется *ирраціональная* или несоизмѣримая; а самыя дѣйствія будемъ называть *ирраціональными.*

Ежели функція составлена изъ безконечнаго числа Алгебрическихъ дѣйствій, то она называется *трансцендентною.* Теперь мы будемъ заниматься только Алгебрическими.

Простѣйшая изъ раціональныхъ функцій какого либо количества есть цѣлая, т. е. такая, въ которую не входитъ дѣленіе надъ тѣмъ количествомъ.

Такова функція въ отношеніи къ x

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots\dots\dots\dots (1),$$

гдѣ a, b, c . . . . . числа; они могутъ быть дробныя и даже ирраціональныя. Изслѣдуемъ нѣкоторыя свойства этой функціи, и во первыхъ замѣтимъ, что для x можно всегда взять такую малую величину, что первый членъ a будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ.

Между членами bx, cx^2, dx^3 ... могутъ быть положительные и отрицательные; если докажемъ, что сумма этихъ членовъ, допуская всѣ ихъ положительными, меньше a, то уже и подавно эта сумма, уменьшаемая нѣсколькими отрицательными членами, будетъ меньше a; возьмемъ еще невыгоднѣе для себя: вмѣсто всѣхъ коэфиціентовъ (предстоящихъ) b, c, d и проч. поставимъ одинъ наибольшій коэфиціентъ, положимъ b'; если и тогда можно взять для x такую малую величину, что

$$a > b'x + b'x^2 + b'x^3 + \ldots.$$

то непремѣнно есть такая величина x, которая сдѣлаетъ

$$a > bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

Докажемъ же, что въ функціи

$$a + b'x + b'x^2 + b'x^3 + \ldots.$$

всегда можно взять вмѣсто x такую малую величину, что сумма членовъ, исключая a, будетъ менѣе a, или

$$a > [(b'x + b'x^2 + b'x^3 + \ldots) = b'x(1 + x + x^2 + \ldots)],$$

$$a > \frac{b'x(1 - x^n)}{1 - x};$$

$$a(1 - x) > b'x(1 - x^n);$$

ежели сдѣлаемъ $a(1 - x) > b'x$, то ясно, что предшедшее условіе и подавно удовлетворено; отсюда

$$a - ax > b'x;$$

$$a > [(ax + b'x) = x(a + b')];$$

и

$$x < \frac{a}{a + b'}.$$

И такъ, ежели дадимъ x величину меньшую или равную $\frac{a}{a+b'}$, то можемъ быть совершенно увѣрены что

$$a > b'x + b'x^2 + b'x^3 + \ldots.$$

и подавно

$$a > bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

Тутъ не должно предполагать, что строка безконечна; — иначе она принадлежала бы къ трансцендентному Анализу, о которомъ теперь говорить не намѣрены.

Возьмемъ вообще какую угодно цѣлую функцію количества x, вида:

$$ax^n + bx^m + cx^k + \cdots\cdots\cdots\cdots (2),$$

гдѣ n, m и k цѣлыя числа; n наименьшая изъ нихъ.

Всегда можно для x взять такую малую величину, что ax^n будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ. Функцію (2) можно написать такъ

$$x^n(a + bx^{m-n} + cx^{k-n} + \cdots);$$

теперь видъ втораго множителя сходенъ съ функціею (1); можетъ быть въ немъ недостаетъ только нѣсколькихъ членовъ, которыя дополнивъ, получимъ функцію

$$a + x + x^2 + \cdots + bx^{m-n} + cx^{k-n} + \cdots$$

Въ ней, какъ уже доказали, можно x взять такимъ, что

$$a > x + x^2 + \cdots + bx^{m-n} + cx^{k-n} + \cdots;$$

слѣдовательно, тѣмъ скорѣе

$$a > bx^{m-n} + cx^{k-n} + \cdots$$

Наконецъ

$$ax^n > bx^m + cx^k + \cdots$$

Теперь докажемъ теорему обратную первой, именно, что въ функціи

$$a + bx + cx^2 + \cdots + kx^m \cdots\cdots (3),$$

количеству x можно дать такую большую величину, что послѣдній членъ kx^m превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ.

Пусть $x = \frac{1}{y}$; функцiя (3) обратится въ

$$a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2} + \ldots + \frac{k}{y^m}$$

$$= \frac{1}{y^m}(ay^m + by^{m-1} + cy^{m-2} + \ldots + k),$$

но въ функцiи

$$ay^m + by^{m-1} + cy^{m-2} + \cdots + k$$

можно y взять такъ малымъ, — это значитъ, x такъ большимъ, — что k превзойдетъ сумму всѣхъ членовъ, то будетъ

$$\frac{k}{y^m} > a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2} + \ldots + \frac{h}{y^{m-1}}$$

или

$$kx^m > a + bx + cx^2 + \cdots + hx^{m-}$$

что и требовалось доказать.

Вообще въ функцiи вида

$$ax^n + bx^m + \cdots cx^k \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

гдѣ n, m, k............цѣлыя числа и k наибольшiй показатель, можно взять x такимъ, что cx^k превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ. Это можно доказать подобнымъ же образомъ, полагая $x = \frac{1}{y}$ и вспомнивъ первую теорему, относительно функцiи (2), увидимъ, что выраженiе

$$ax^n + bx^m + \cdots + cx^k$$

есть не что иное какъ функцiя (3); въ ней можетъ быть недостаетъ нѣкоторыхъ членовъ, которыми дополнивъ ее, мы еще увеличимъ сумму остальныхъ членовъ; и такъ, ежели x можно дать такую большую величину, что cx_k будетъ больше суммы съ дополненными членами, то уже непремѣнно болѣе суммы прежнихъ членовъ функціи (4).

Повторимъ доказанное: вообще въ функціи вида

$$ax^n + bx^m + cx^k + \cdots$$

количество x можно всегда взять такъ малымъ, что членъ, содержащій въ себѣ x съ наименьшимъ показателемъ, будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ членовъ. Или для x можно взять такую величину, что членъ съ наибольшимъ показателемъ превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ членовъ.

Для краткости означимъ

$$a + bx + cx^2 + \cdots kx^m + lx^n \text{ чрезъ } f(x) \cdots\cdots (5)$$

впослѣдствіи, для отличія разныхъ функцій того же количества x, будемъ означать ихъ еще чрезъ

$$\varphi(x),\ \psi(x),\ \chi(x),\ \omega(x),\ \theta(x),\ \Phi(x) \text{ и проч.}$$

Разсмотримъ одинъ изъ членовъ этой функціи; возьмемъ общій kx^m; x есть количество перемѣнное, т. е. способное принимать какія угодно величины; вмѣсто x возьмемъ $x + y$, тогда

$$k(x+y)^m = kx^m + mkx^{m-1}y + \frac{m(m-1)}{1.2}kx^{m-2}y^2 + \ldots (6)$$

Это разложеніе сдѣлать мы можемъ, потому, что m есть цѣлое и положительное число, а Ньютоновъ биномъ при цѣломъ и положительномъ показателѣ доказывается чрезъ простое умноженіе.

Отъ перемѣны x въ $x+y$ каждый членъ функціи (5) измѣнится, и будетъ

$$f(x+y) = a + b(x+y) + c(x+y)^2 + \cdots$$
$$+ k(x+y)^m + l(x+y)^n$$

разлагая каждый членъ подобно какъ въ (6), получимъ выраженіе $f(x+y)$; отберемъ всѣ члены непомноженные на y, особо, всѣ члены умноженныя на y, y^2 и такъ далѣе, особо; находимъ

$$f(x+y)=[lx^n+kx^m+\ldots\ldots+cx^2+bx+a=f(x)]$$
$$+(nlx^{n-1}+mkx^{m-1}+\ldots\ldots+2cx+b)y$$
$$+\left[\left(\frac{nl(n-1)}{1.2}x^{n-2}+\frac{mk(m-1)}{1.2}x^{m-2}+\ldots+c\right)y^2=\right.$$
$$\left.\frac{y^2}{1.2}(nl(n-1)x^{n-2}+km.(m-1)x^{m-2}+\ldots+2c)\right]+$$
$$\left[\left(\frac{nl(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}+\frac{mk(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}+\ldots\right)y^3\right.$$
$$\left.=\frac{y^3}{1.2.3}\Big(ln(n-1)(n-2)x^{n-3}+km(m-1)(m-2)x^{m-3}+..\Big)\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

Коэфиціенты при y, $\frac{y^2}{1.2}$, $\frac{y^3}{1.2.3}$ получаются непосредственно, чрезъ разложеніе каждаго члена $f(x+y)$; весьма бы интересно было написать прямо эти разложенія, или коэфиціенты; это очень легко и просто: въ самомъ дѣлѣ, коэфиціентъ при $\frac{y^2}{1.2}$ происходитъ отъ коэфиціента при y совершенно также, какъ коэфиціентъ при y происходитъ отъ функціи (5). Наприм. чтобъ получить членъ помноженный на y, соотвѣтствующій lx^n, должно въ самомъ членѣ lx^n показателя n уменьшить единицею и на него же помножить, и будетъ: nlx^{n-1}; точно также, чтобъ получить коэфиціентъ при $\frac{y^2}{1.2}$, соотвѣтствующій nlx^{n-1}, должно въ этомъ членѣ показателя уменьшить единицею и помножить на самаго показателя, откуда выдетъ: $ln(n-1)x^{n-2}$; подобно этому получимъ соотвѣтствующій коэфиціентъ при $\frac{y^3}{1.2.3}\ldots$ Это опредѣленное дѣйствіе, охарактеризовано названіемъ *производныхъ* функцій; такъ: nlx^{n-1} есть производная lx^n. Производная отъ производной называется 2-ою производною функціею данной первоначальной, именно: $n(n-1)lx^{n-2}$ есть первая производная функціи nlx^{n-1}, или 2-я производная функціи lx^n и т. д.

Послѣ этого опредѣленія ясно, что коэфиціентъ при y будетъ сумма первыхъ производныхъ каждаго члена функціи (5); коэфиціентъ при $\frac{y^2}{1.2}$, будетъ сумма первыхъ производныхъ каждаго члена коэфиціента при y, или сумма вторыхъ производныхъ каждаго члена первоначальной функціи (5) и т. д.

Первая производная отъ $f(x)$, т. е. сумма первыхъ производныхъ каждаго ея члена, пишется такъ: $f'(x)$.

Вторая производная, отъ $f(x)$, т. е. сумма вторыхъ производныхъ каждаго ея члена пишется: $f''(x)$. Точно также и далѣе: $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, $f^{\text{V}}(x)$ и проч.; такъ что вмѣсто выраженія (7) получимъ

$$f(x+y)=f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{1.2}f''(x)+\frac{y^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots(8).$$

Строка эта небудетъ безконечна, потому что высшій показатель степени x (7) въ первой производной есть $(n-1)$. Высшій показатель степени x во второй производной есть $(n-2)$, въ третьей $(n-3)$; .... наконецъ показатель степени x въ производной n-го порядка будетъ $n-n=0$, т. е. нулевой; и такъ послѣдній членъ (8) заключаетъ въ себѣ одно постоянное, а производная $(n+1)$ порядка будетъ $=0$.

Напримѣръ: взявъ 1-ю производную функціи lx_n
имѣемъ $\qquad = nlx^{n-1}$
2-я производная $\quad = n(n-1)lx^{n-2}$
3-я „ $\quad = n(n-1)(n-2)lx^{n-3}$
(n)-я производная

$$= n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]lx^{n-n}$$
$$= 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)nl$$

ежели n есть высшая степень, или просто степень функціи (5), то производныя n-го порядка отъ прочихъ членовъ kx^m ..... будутъ нуль, потому что n покрайней мѣрѣ единицею больше m и прочихъ. По этому то n-я производная будетъ послѣднимъ членомъ. Факторъ при 1-й производной

$$= \frac{y}{1}$$

при 2-й производной $\quad = \frac{y^2}{1.2}$

„ 3-й „ $\quad = \frac{y^3}{1.2.3}$

„ m „ $\quad = \frac{y^m}{1.2\ldots m}$

„ n „ $\quad = \frac{y^n}{1.2\ldots n}$

и такъ послѣдній членъ строки (8) будетъ $=ly^n$, а общій членъ представится чрезъ $\frac{y^m}{1.2.3\ldots m}f^m(x)$ и строка напишется такъ:

$$f(x+y)=f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{y^m}{1.2.3\ldots m}f^m(x)+\ldots+ly^n.$$

Чтобъ показать пользу этого изслѣдованія, сдѣлаемъ два важныя приложенія:

1) Имѣя численную величину функціи, хочу знать: отъ прибавленія малаго количества къ x, функція увеличится или уменьшится. 2) Опредѣлимъ, какую численную величину должно поставить вмѣсто x, чтобъ функція (5) была наибольшая или наименьшая. Разрѣшимъ первое; для этого къ x прибавимъ y, получимъ

$$f(x+y)=f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{y^m}{1.2\ldots m}f^m(x)\ldots.$$

и слѣдовательно

$$f(x+y)-f(x)=yf'(x)+\frac{y^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{y^m}{1.2\ldots m}f^m(x)\ldots.(9),$$

ежели отъ прибавленія y къ x, функція увеличивается, то $f(x+y)-f(x)\ldots(9)$ должна быть больше нуля или положительною; въ противномъ случаѣ, если съ увеличивающимся x, $f(x)$ уменьшается, то величина (9), отрицательная. Въ выраженіи:

$$yf'(x)+\frac{y^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{y^m}{1.2\ldots m}f^m(x)$$

можно взять y такъ малымъ, что $yf'(x)$ будетъ больше суммы всѣхъ прочихъ; и тогда, слѣдовательно, знакъ всего выраженія (9) будетъ зависѣть отъ знака при $f'(x)$, потому, что y есть положительное; и такъ, ежели первая производная, $f'(x)$ положительная, то отъ весьма малаго увеличенія перемѣнной x, $f(x)$ увеличивается; а ежели $f'(x)$ отрицательная, то $f(x)$ уменьшается съ увеличивающимся x. Это надо хорошо запомнить. Заключеніе получимъ совершенно на оборотъ, когда въ $f(x)$ уменьшимъ x на весьма малое количество y; дѣйствительно:

$$f(x-y)-f(x)=-yf'(x)+\frac{y^2}{1.2}f''(x)-\frac{y^3}{1.2.3}f'''(x)\ldots.$$
$$\pm\frac{y^m}{1.2\ldots m}f^m(x)^{*})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$
$$=-\left[yf'(x)-\frac{y^2}{1.2}f''(x)+\frac{y^3}{1.2.3}f''(x)-\ldots\mp\frac{y^m}{1.2..m}f^m(x)\right]$$

всегда можно y дать такую малую величину, что $yf'(x)$ будетъ болѣе суммы всѣхъ прочихъ членовъ, и слѣдовательно знакъ при $f(x-y)-f(x)$ будетъ зависѣть отъ знака при $yf'(x)$, но y количество положительное, слѣдовательно, отъ знака $f'(x)$; и именно, когда $f'(x)$ отрицательная, то $-yf'(x)$ положительное; $f(x-y)-f(x)$ положительная; $f(x)$ увеличивается. При $f'(x)$ положительной, функція $f(x)$ съ уменьшающимся x будетъ уменьшаться.

2). Теперь легко доказать слѣдующую теорему, въ первой разъ предложенную Лагранжемъ, которая намъ часто понадобится.

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots.$$
$$+\frac{h^n}{1.2\ldots..n}f^n(x+\theta h)$$

гдѣ θ величина меньше единицы и больше нуля; n какое нибудь цѣлое положительное число.

a) Во первыхъ докажемъ, что:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h);$$

если h будемъ приписывать различныя величины

---

*) До этого разложенія можно достигнуть, совершенно подобнымъ образомъ какъ и къ (9), полагая въ функціи (5) вмѣсто x не $x+y$, какъ то дѣлали для полученія (9), но $x-y$, и продолжая далѣе тѣже разложенія.

отъ нуля до нѣкоторой конечной величины, то $f'(x+h)$ будетъ также принимать разныя величины. Пусть самая малая изъ нихъ, A; самая большая, B; будетъ

$$f(x+h)-f(x)-\mathrm{A}h>0\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$
$$f(x+h)-f(x)-\mathrm{B}h<0\cdots\cdots\cdots\cdots(12).$$

Чтобы это повѣрить, возьмемъ ихъ производныя, относительно h, и найдемъ *)

$$f'(11)=f'(x+h)-\mathrm{A}>0$$
$$f'(12)=f'(x+h)-\mathrm{B}<0,$$

потому, что A есть самая малая, B самая большая изъ различныхъ $f'(x+h)$; изъ этого видимъ, что (11) съ увеличивающимся h увеличивается, а (12) уменьшается; обѣ они при $h=0$, обращаются въ нуль; то очевидно, что при h большемъ нежели нуль, неравенства (11) и (12) справедливы; ихъ можно написать такъ:

$$f(x+h)-f(x)>\mathrm{A}h$$
$$f(x+h)-f(x)<\mathrm{B}h;$$

та же величина $f(x+h)-f(x)$ больше одного выраженія $\mathrm{A}h$ и меньше другаго $\mathrm{B}h$, и слѣдовательно равна какой то средней величинѣ между $\mathrm{A}h$ и $\mathrm{B}h$; пусть она будетъ $\mathrm{C}h$, гдѣ C есть какая-то промежуточная величина между A и B, которую можемъ выразить чрезъ $f'(x+\theta h)$, гдѣ $\theta>0$ и <1, и будетъ

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\cdots\cdots\cdots(13).$$

b) Во вторыхъ докажемъ, что ежели справедлива

---

*) Членъ $f(x)$ не содержитъ h, то его производная нуль.

эта теорема для n-вой производной, то она справедлива и для $n+1$-ой, т. е. когда имѣемъ

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2..n}f^n(x+\theta h)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14),$$

то будетъ и

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2....n}f^n(x)+\frac{h^{n+1}}{1....(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h)$$

При различныхъ h, $f^{n+1}(x+h)$ будутъ различныя; меньшая изъ нихъ пусть A, большая B, то

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{Ah^{n+1}}{1.2.3...(n+1)}>0\ldots\ldots(15)$$

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{Bh^{n+1}}{1.2.3...(n+1)}<0\ldots\ldots(16)$$

чтобъ увѣриться въ справедливости этого, беру производныя (15) и (16), относительно h,

$$f'(15)=f'(x+h)-f'(x)-hf''(x)-\ldots$$
$$-\frac{h^{n-1}}{1.2.3....(n-1)}f^n(x)-\frac{Ahn}{1.2....n}\ldots\ldots\ldots(17),$$

$$f'(16)=f'(x+h)-f'(x)-hf''(x)-\ldots$$
$$-\frac{h^{n-1}}{1.2....(n-1)}f^n(x)-\frac{Bh^n}{1.2....n}\ldots\ldots\ldots(18).$$

но по (14), поставя f' вмѣсто f, имѣемъ

$$f'(x+h)=f'(x)+hf''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}f^n(x)+\frac{h^n}{1.2.3....n}f^{n+1}(x+\theta h)$$

или

$$f'(x+h)-f'(x)-hf''(x)-\ldots$$
$$-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n}(x)-\frac{h^{n}}{1.2.3\ldots n}f^{n+1}(x+\theta h)=0\ldots(19).$$

Сравнивъ (17) съ (19) видимъ, что такъ какъ A есть малая изъ $f^{n+1}(x+h)$, слѣдовательно меньше и $f^{n+1}(x+\theta h)$, по этому $[(17)=f'(15)]>0$; производная больше нуля, то функція (15) съ увеличивающимся h увеличивается, но при $h=0$ она также ноль, слѣдовательно при какомъ нибудь h, она больше нуля, и такъ (13) неравенство справедливо.

Сравнивая (18) и (19) видимъ, что по причинѣ B большаго чѣмъ $f^{n+1}(x+\theta h)$, (18) $<[(19)=0]$, т. е. $[(18)=f'(16)]<0$; производная отрицательная, самая функція (16) съ увеливающимся h уменьшается; но при $h=0$ она нуль, слѣдовательно при какомъ нибудь h, она меньше нуля; и такъ и (16) неравенство справедливо; (15) и (16) неравенствы могутъ быть написаны такъ:

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)-\ldots>A\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)-\ldots<B\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

или сопокупляя ихъ въ одно, будетъ

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{2}f''(x)-\ldots=C\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

гдѣ C величина больше A и меньше B; но какъ A есть меньшая изъ $f^{n+1}(x+h)$, а B большая изъ нихъ, то средняя между ими C можетъ представится чрезъ $f^{n+1}(x+\theta h)$. И такъ

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots\ldots$$
$$=f^{n+1}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)}$$

или

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$
$$+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h)\ldots\ldots\ldots(20).$$

Доказавши теперь при справедливости (14), справедливость (20), очевидно можемъ заключить, что при (13) будетъ справедливо:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$$

и

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+\theta h)$$

и

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)$$
$$+\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(x+\theta h)$$

и вообще

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots\ldots$$
$$+\frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n}f^n(x+\theta h)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

3) Чтобъ сыскать численную величину для x, которая дѣлаетъ функцію $f(x)$ наибольшею или наименьшею, замѣчаю, что пока 1-я производная положительная, до тѣхъ поръ, съ увеличивающимся x,

функція увеличивается; потомъ, если производная сдѣлается отрицательною; функція, съ увеличивающимся x, начинаетъ уменьшаться. Тамъ, гдѣ она перестала увеличиваться, и начала уменьшаться, будетъ наибольшая величина ея. Ясно что этотъ переходъ функціи изъ увеличивающагося состоянія въ уменьшающееся, или наибольшая величина ея, совершается въ одно время съ переходомъ производной функціи изъ положительной въ отрицательную, т. е. въ то самое время, когда эта производная дѣлается равною нулю; и такъ для наибольшей величины какой либо функціи, производная должна быть равна нулю: $f'(x) = 0$.

Точно также докажемъ, что и для наименьшей величины $f(x)$, должно быть $f'(x) = 0$. Оба эти случая можемъ доказать заразъ слѣдующимъ образомъ: если x дѣлаетъ функцію *наибольшею*, то должно, чтобъ была $f(x) > f(x \pm y)$ или лучше

$$f(x-y) < f(x) > f(x+y),$$

т. е. чтобы при x уменьшающемся на малую величину y, и при x увеличивающемся на y, обѣ смѣжныя величины $f(x-y)$ и $f(x+y)$ были меньше $f(x)$. Точно также, если x дѣлаетъ $f(x)$ наименьшею, должно быть

$$f(x-y) > f(x) < f(x+y)$$

или, при уменьшеніи и увеличеніи x, обѣ смѣжныя величины

$$f(x-y) \text{ и } f(x+y)$$

должны быть больше $f(x)$; или еще такъ: для наибольшей

$$f(x) > f(x) \pm yf'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x) \pm \ldots$$

для наименьшей

$$f(x) < f(x) \pm yf'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x) \pm \ldots\ldots$$

Эти два неравенства необходимо требуютъ, чтобъ втораго члена $yf'(x)$ не было, потому что если онъ существуетъ, то при $(+y)$ этотъ членъ, отъ котораго зависитъ знакъ всѣхъ членовъ, кромѣ $f(x)$, можетъ быть $+$ или $-$, слѣдовательно: $f(x)$ меньше или больше одной изъ своихъ смѣжныхъ величинъ $f(x+y)$, а при $(-y)$ она въ тоже время больше или меньше другой своей смѣжной $f(x-y)$; но по положенію, $f(x)$ должна быть въ одно время больше, или въ одно время меньше обѣихъ своихъ смѣжныхъ:

$$f(x-y) \text{ и } f(x+y)$$

стало быть для наибольшей или наименьшей величины какой либо функціи, должно во первыхъ чтобъ

$$yf'(x) = 0 \text{ или } f'(x) = 0$$

во вторыхъ, чтобы третій членъ $\frac{y^2}{2} f''(x)$ (который можемъ сдѣлать больше всѣхъ прочихъ членовъ), или $f''(x)$, была: для наибольшей величины $f(x)$, *отрицательною,* а для наименьшей, *положительною.* Величина x удовлетворяющая уравненію

$$f'(x) = 0$$

будетъ та величина, которая дѣлаетъ $f(x)$ наибольшею или наименьшею, и отъ которой вторая производная $f''(x)$ становится отрицательною для наибольшей, и положительною для наименьшей.

Рѣшеніе этой задачи привело насъ къ рѣшенію уравненія $f'(x) = 0$, или вообще

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots\cdots + a = 0;$$

рѣшить это уравненіе значитъ, для x найти такую величину, которая, будучи подставлена въ $f(x)$, дѣлаетъ $f(x) = 0$. Извлеченіе корней есть частный случай рѣшенія уравненій, именно, ежели останутся первый и послѣдній члены:

$$Ax^m + a = 0.$$

Величину x будемъ называть *корнемъ*, и функціи, и уравненія. Въ этомъ важномъ вопросѣ начнемъ съ простѣйшихъ уравненій, и потомъ перейдемъ къ сложнѣйшимъ:

Пусть

$$x^2 = 3 \cdots\cdots (a);$$

посмотримъ, неудовлетворяетъ ли этому уравненію величина x, равная цѣлому числу. Положимъ $x=1$, то $x^2 = 1$, меньше заданнаго; ежели $x=2$, то $x^2=4$, больше; слѣдовательно цѣлыя и положительныя неудовлетворяютъ; ну такъ положимъ $x=-1$, тогда $x^2 = 1$ опять меньше; если $x = -2$, то $x^2 = 4$, больше 3-хъ; слѣдовательно x цѣлымъ отрицательнымъ также не можетъ быть; но не дробную ли величину имѣетъ x? положимъ $x = \frac{b}{a}$, гдѣ a и b первыя между собою, потому, что ежели у нихъ есть общій множитель, мы сократимъ его; $x = \frac{b}{a}$, то $x^2 = \frac{b^2}{a^2}$, откуда $\frac{b^2}{a^2} = 3$; b и a первыя между собою, то $\frac{b^2}{a^2}$ дробь, слѣдовательно уравненіе, $\frac{b^2}{a^2} = 3$, или $x = \frac{b}{a}$, невозможно. И такъ x не можетъ имѣть ни цѣлой положительной или отрицательной, ни дробной, но будетъ имѣть особую величину. Эти величины, которыхъ нельзя выразить ни цѣлымъ числомъ, ни дробью, называются *ирраціональными* или несоизмѣримыми. Извѣстно изъ элементарной Алгебры, что ирраціональныя количества изображаются корнемъ или радикаломъ,

$$\sqrt[m]{A}$$

какой нибудь степени m, изъ какого нибудь числа A цѣлаго или дробнаго, положительнаго или отрицательнаго.

Возьмемъ еще $\quad x^2 = -3 \cdots\cdots\cdots (b);$

тутъ видимъ прямо, что никакое цѣлое или дробное число, принятое за x, не удовлетворитъ этому уравненію; потому, что квадратъ всякаго количества есть положительный, а тутъ онъ долженъ быть отрицательнымъ. Уравненіе это можно представить проще, положивъ $x = y\sqrt{3}$, $x^2 = 3y^2$ или $3y^2 = -3$, $y^2 = -1$; и y обыкновенно пишутъ такъ: $y = \sqrt{-1}$. Выраженіе $y = \sqrt{-1}$ ничего не представляетъ; это одинъ только знакъ; дѣйствительно, что такое $y = \sqrt{-1}$? есть такое число котораго квадратъ, отрицательная единица; а этакаго числа нѣтъ, и потому $\sqrt{-1}$, есть только одинъ символъ или знакъ: новѣйшіе Геометры изображаютъ этотъ знакъ чрезъ i, такъ: $i = \sqrt{-1}$; знакъ i называютъ *мнимымъ*.

Помня, что $i^2 = -1$, изслѣдуемъ нѣкоторыя свойства этого знака: если онъ сложенъ самъ съ собою два, три раза и проч., то будетъ $2i$, $3\cdot$

и проч. Помноженіе его производится обыкновеннымъ способомъ. Всякое выраженіе съ мнимыми знаками вообще можетъ быть представлено такъ: $a + b\sqrt{-1} = a + bi$, гдѣ a содержитъ сумму всѣхъ вещественныхъ членовъ не помноженныхъ на i; b, сумму всѣхъ вещественныхъ членовъ помноженныхъ на i; при $a = 0$, $b = 1$ это выраженіе обращается въ одинъ мнимый знакъ i. Вотъ примѣчательное свойство этихъ выраженій; если имѣемъ

$$a + b\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

или $$a + bi = \alpha + \beta i \cdots\cdots\cdots\cdots (22),$$

то непремѣнно должно быть

$$a = \alpha,\ \ b = \beta$$

потому, что

$$bi - \beta i = \alpha - a \text{ и } i = \frac{\alpha - a}{b - \beta};$$

если α неравно a, и b неравно β, то знакъ i будетъ имѣть численную величину положительную или отрицательную, а это быть не можетъ; слѣдовательно необходимо должно

$$a = \alpha \text{ и } b = \beta.$$

Такъ какъ $i = \sqrt{-1}$ ни чемъ не льзя выразить, то надобно отбросить названіе *величина*, этому знаку приписываемое; и просто называть знакомъ, или иногда для отличія, *мнимымъ знакомъ*. $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модуль* мнимаго выраженія $a + bi$.

Чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе этихъ мнимыхъ выраженій на подобныя имъ, и на вещественныя, равно какъ и чрезъ возвышеніе ихъ въ степени, получаемъ выраже́ніе того же вида. Дѣйствительно

$$a+bi+\alpha+\beta i=a+\alpha+(b+\beta)i=\mathrm{A}+\mathrm{B}i\cdots(23)$$

$$a'+b'i-(\alpha'+\beta'i)=a'-\alpha'+(b'-\beta')i$$
$$=\mathrm{A}'+\mathrm{B}'i\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$(a+bi)(\alpha+\beta i)=a\alpha+\alpha bi+a\beta i-b\beta$$
$$=a\alpha-b\beta+(\alpha b+a\beta)i=\mathrm{A}''+\mathrm{B}''i\cdots\cdots\cdots(25)$$

ежели надо перемножить

$$(a+bi)(a'+b'i)(a''+b''i)(a'''+b'''i)$$

то вообще это произведеніе будетъ вида $\mathrm{P}+\mathrm{Q}i$.

Въ (25) доказано, что

$$(a+bi)(a'+b'i)=\mathrm{A}+\mathrm{B}i,$$

то и

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}i)(a''+b''i)=(a+bi)(a'+b'i)(a''+b''i)$$
$$=\mathrm{A}_{,}+\mathrm{B}_{,}i$$

и потомъ

$$(\mathrm{A}_{,}+\mathrm{B}_{,}i)(a'''+b'''i)=\mathrm{P}+\mathrm{Q}i$$

такъ что вообще

$$(a+bi)(a'+b'i)(a''+b''i)(a'''+b'''i)(\ldots)=\mathrm{P}+\mathrm{Q}i\ldots(26).$$

Для возвышенія въ степени должно только положить въ (26) всѣ множители равными такъ, что вообще будетъ

$$(a+bi)^m=\mathrm{A}+\mathrm{B}i\cdots\cdots\cdots(27).$$

Говорю, что и частное отъ $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ будетъ также вида $p+qi$; для этаго помноживъ числителя и знаменателя на $\alpha-\beta i$, получимъ

$$\frac{(a+bi)(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}=\frac{(a+bi)(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}i}{\mathrm{C}}=p+qi\ldots(28)$$

то же должно заключить ежели одинъ изъ членовъ (23), (24), (25), (26), (28), будетъ вещественный; такъ что слагая, вычитая, умножая, дѣля мнимыя выраженія между собою, или мнимыя съ вещественными, получимъ вообще выраженіи вида $p + qi$, которые могутъ впрочемъ обратиться иногда и въ вещественные, такъ на прим. въ (23), когда $b = -\beta$; въ (24), когда $b' = \beta'$ и проч.

Теперь можемъ доказать, что $\sqrt[2]{a + bi}$ имѣетъ непремѣнно видъ $p + qi$, и опредѣлить p и q. Въ самой вещи допустивъ, что p и q вещественныя, увидимъ, что $p + qi$ оправдаетъ наше предположеніе, и точно найдемъ для p и q величины вещественныя.

Пусть
$$\sqrt{a + bi} = p + qi$$
будетъ
$$a + bi = p^2 + q^2 i^2 + 2pqi = p^2 - q^2 + 2pqi,$$
но въ (11) доказано, что ежели имѣемъ подобнаго вида два равенства, то непремѣнно
$$a = p^2 - q^2 \text{ и } b = 2pq$$
откуда:
$$(p^2 - q^2)^2 = a^2; \quad 4p^2q^2 = b^2$$
и
$$(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2 = a^2 + b^2$$
$$p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = a^2 + b^2$$
$$(p^2 + q^2)^2 = a^2 + b^2$$
$$p^2 + q^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \cdots\cdots\cdots (29).$$

Тутъ корень непремѣнно надо взять съ $+$, потому, что сумма квадратовъ $p^2 + q^2$ непремѣнно величина положительная,
$$p^2 - q^2 = a \cdots\cdots\cdots\cdots (30).$$

Изъ уравненій (29) и (30) получимъ

$$p^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

$$p = \theta\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

$$q = \theta'\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

гдѣ θ и θ' и теперь, и впослѣдствіи будутъ означать ± 1. О знакахъ p и q можно прямо заключить изъ того, что $2pq = b$, т. е.

$$2\theta\theta'\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = \theta\theta'\sqrt{b^2} = b.$$

откуда, если b положительное, $\theta\theta' = 1$; и $\theta\theta' = -1$, когда b отрицательное; при положительномъ b найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ q &= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

при b отрицательномъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ q &= \mp\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (32).$$

Величины p и q найдены, и обѣ вещественныя, потому что $\sqrt{a^2+b^2}$ положительный и больше a; отчего $\sqrt{a^2+b^2}+a$ и $\sqrt{a^2+b^2}-a$ будутъ величины положительныя; а квадратныя корни ихъ p и q, вещественные; это даетъ право заключить, что наше предположенiе справедливо, т. е., что выраженiе вида $a+bi$ имѣетъ квадратный корень вида $p+qi$,

$$\sqrt{a+bi}=p+qi\cdots\cdots\cdots\cdots(33).$$

Точно такимъ же образомъ можемъ сказать, что и корень квадратный $p+qi$ будетъ подобнаго вида, а изъ этаго заключаемъ, что вообще

$$\sqrt[2k]{\alpha+\beta i}=(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{2k}}=\mathrm{A}+\mathrm{B}i\cdots\cdots(34).$$

Когда уравненiи (a) и (b) привели насъ къ величинамъ несоизмѣримымъ и миимымъ знакамъ, то почему знать: уравненiе

$$\mathrm{A}x^m+\mathrm{B}x^{m-1}+\cdots\cdots+k=0$$

не приведетъ ли, при рѣшенiи, къ особымъ величинамъ; т. е. можетъ ему не будутъ удовлетворять ни цѣлыя, ни дробныя, ни несоизмѣримыя величины, ни предшедшiя мнимыя выраженiя, но войдутъ вообще какiя нибудь другiя. Докажемъ теперь, что въ рѣшенiе всѣхъ уравненiй не войдетъ ни какихъ другихъ мнимыхъ знаковъ кромѣ i. Эта теорема можетъ быть выражена такъ; всякая цѣлая функцiя:

$$f(x)=\mathrm{A}x^m+\mathrm{B}x^{m-1}+\cdots+k$$

имѣетъ корень вида:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\alpha+\beta i,$$

гдѣ α и β какiя нибудь величины, соизмѣримыя или несоизмѣримыя. Для рѣшенiя этаго вопроса нужно сперва рѣшить уравненiя:

I) $x^n=1$; II) $x^n=-1$; III) $x^n=i$; IV) $x^n=-i$.

Если докажемъ, что рѣшеніе этихъ уравненій существуетъ, то легко будетъ доказать, что всякая цѣлая функція рѣшается корнемъ вида $\alpha + \beta i$.

I) Для $x^n = 1$, ясно, что $x = 1$ будетъ рѣшеніе.

II) Для $x^n = -1$ должно различить, когда n нечетное и четное; ежели n нечетное, то $x = -1$ удовлетворяетъ уравненію, и слѣдовательно рѣшеніе будетъ. Если же n четное, т. е. $n = 2 \cdot {}^k p$, гдѣ p нечетное число, будетъ $x^n = x^{2^k \cdot p} = -1$. Сдѣлавъ $x^{2^k} = y$, $y^p = -1$, найдемъ, что $y = -1$, или $x^{2^k} = -1$ удовлетворяетъ урав. $x^n = -1$; чтобъ найти x удовлетворяющій $x^{2^k} = -1$, извлечемъ квадратный корень

$$x^{2^{k-1}} = i,$$

и

$$x^{2^{k-2}} = \sqrt{i}.$$

Этотъ корень найдемъ, подставя въ (33), величины равныя p и q, выведенныя изъ предположенія $a + bi = i$, гдѣ стало быть $a = 0$, $b = 1$. Такимъ образомъ

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = x^{2^{k-2}}$$

извлекши снова квадратный корень изъ этаго выраженія получимъ

$$x^{2^{k-3}} = \sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{1+i}}{\sqrt[4]{2}};$$

сравнивъ $1 + i$ съ $a + bi$, имѣемъ

$$p = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}, \quad q = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+i} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}\, i = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$$

$$x^{2^{k-3}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}}$$

продолжая такимъ образомъ далѣе, видимъ, что каждое послѣдовательное выраженіе для x съ меньшимъ показателемъ, находится посредствомъ извѣстныхъ вещественныхъ величинъ и i; такъ, что когда извлечемъ изъ x^{2^k}, k разъ квадратный корень, то получимъ x, выраженный вещественными величинами и знакомъ i.

III) $x^n = i$. Ежели n нечетное и по раздѣленіи на 4 даетъ въ остаткѣ 1, то уравненіе удовлетворится чрезъ $x = i$, потому, что $x^2 = -1$, $x^4 = 1$, $x^5 = i$, $x^9 = i$, $x^{13} = i$ и проч. вообще $x^{4k+1} = i$. Если же $n = 4k + 3$, тогда уравненіе $x^n = i$ удовлетворяется чрезъ $x = -i$. Въ самомъ дѣлѣ $x^2 = -1$, $x^4 = 1$, $x^8 = 1$, $x^{16} = 1$, $x^{4k} = 1$, $x^3 = i$, то $x^{4k+3} = i$; слѣдовательно $x = -i$ есть корень функціи $x^n = i$.

Когда въ уравненіи $x^n = i$, n будетъ четное, т. е. $n = 2^k m$, гдѣ m нечетное, тогда $x^{2^k m} = i$. Чтобъ найти корень этой функціи, положу $x^{2^k} = y$, то $x^n = x^{2^k . m} = y^m = i$, m нечетное, слѣдовательно $y = x^{2^k} = i$; или $y = -i$ удовлетворяетъ уравненію $x^n = x^{2^k . m}$, и по этому остается только сыскать корень функціи $x^{2^k} = i$ или $x^{2^k} = -i$. Эту величину x найдемъ, извлекая корни квадратные послѣдовательно изъ $x^{2^k} = i$ и $= -i$. Но мы знаемъ что квад. корни изъ $a + bi$ выражаются посредствомъ мнимаго же знака i, слѣдовательно производя дѣйствія самою вещію, мы бы нашли наконецъ x выраженнымъ только посредствомъ i. Дѣйствительно

$$x^{2^k-1}=\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$x^{2^k-2}=\frac{\sqrt{1+i}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}}$$

и такъ далѣе до x, которой выразится только посредствомъ i; если $x^{2^k}=-i$, то $x^{2^k-1}=\sqrt{-i}$, положивъ $a+bi=-i$, имѣемъ

$$a=0,\ b=-1,\ p=\frac{1}{\sqrt{2}},\ q=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

откуда

$$\sqrt{-i}=p+qi=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ i=\frac{1-i}{\sqrt{2}};$$

и такъ

$$x^{2^k-1}=\frac{1-i}{\sqrt{2}};$$

продолжая подобнымъ образомъ далѣе, видимъ, что и въ этомъ случаѣ въ величину x не войдетъ ни какихъ другихъ мнимыхъ знаковъ кромѣ i, и такъ корень функціи $x^n=i$ непремѣнно выразится посредствомъ вещественныхъ величинъ и знака i.

IV) $x^n=-i$, когда n нечетное, то или $n=4k+1$ или $n=4k+3$ въ первомъ случаѣ $x=-i\ldots(c)$, удовлетворяетъ этому уравненію, потому, что $x^2=-1$, $x^4=1$, $x^{4k}=1$ и $x^{4k+1}=-i$; во второмъ случаѣ $x=i\ldots(d)$, есть корень функціи; въ самой вещи $x=i$, $x^2=-1$, $x^4=1$, $x^{4k}=1$, $x^3=-i$ и $x^{4k+3}=-i$. Когда же n четное, и именно $n=2^k.m$, то $x^n=x^{2^k.m}=-i$

положивъ: $x2^k = y$, $x^n = y^m = -i$; здѣсь m нечетное; а передъ этимъ видѣли, (c) и (d), что корень $y^m = -i$ есть, или $-i$, или i, и такъ $x^{2^k} =$ или $-i$ или i; въ (III) же доказали, что ежели $x^{2^k} = i$ или $x^{2^k} = -i$, то корень этихъ функцій выражается тоже посредствомъ вещественныхъ величинъ и знака i, слѣдовательно въ рѣшеніе уравненія $x^n = -i$ не войдетъ ни какого другаго знака кромѣ i.

ЛЕКЦІЯ II.

Общій видъ корней раціональныхъ функцій.

Теперь можемъ доказать, что цѣлая раціональная функція

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + kx + l \ldots (1)$$

имѣетъ вещественный или мнимый корень непремѣнно такого вида

$$p + qi,$$

гдѣ p и q величины вещественныя; и который поставя вмѣсто x, обратимъ функцію (1) въ нуль; или что то же самое, получимъ

$$f(x) = f(p + qi) = 0.$$

И потомъ докажемъ, что корни никакого другаго вида имѣть не могутъ.

Положимъ что коэфиціенты a, b, c, $\cdots$ вещественные, подставимъ въ (1) вмѣсто x, $p + qi$ и развернемъ:

$$f(p + qi) =$$

$$f(p) + f'(p)qi + f''(p)\frac{q^2i^2}{1.2} + f'''(p)\frac{q^3i^3}{1.2.3} + f^{\text{IV}}(p)\frac{q^4i^4}{1.2.3.4} \ \& \ldots (2).$$

Если усомнятся и скажутъ, что это разложеніе существуетъ только для веществ. величинъ вида $f(x + y)$, развертываемыхъ въ рядъ; то вспомня, что мы вывели его изъ Ньютонова бинома, который, при цѣломъ и положительномъ показателѣ, справедливъ: для величинъ вещественныхъ и для знаковъ мнимыхъ, потому, что мы уже видѣли какимъ образомъ мнимые знаки складываются, вычитаются, помножаются и возвышаются въ степень, — вспомня, говорю, все это, устранимъ всякое сомнѣніе.

Отберемъ теперь въ функціи (2) вещественные члены особо, мнимые особо, и примѣчая, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = +i$ и т. д., найдемъ

$$f(p+qi) =$$

$$\left(f(p) - f''(p)\frac{q^2}{2} + f^{\text{IV}}(p)\frac{q^4}{2.3.4} - \ldots\right) + \left(f'(p)q - f'''(p)\frac{q^3}{2.3} + \right.$$

$$\left. f^{\text{V}}(p)\frac{q^5}{2.3.4.5} - \&\right)i.$$

сдѣлавъ

$$f(p) - f''(p)\frac{q^2}{2} + \ldots = \text{P},$$

$$f'(p)q - f'''(p)\frac{q^3}{2.3} + \ldots = \text{Q},$$

имѣемъ $$f(p+qi) = \text{P} + \text{Q}i \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Если въ функціи (1) вмѣсто x поставимъ $p - qi$, или, что тоже самое, вмѣсто $+i$ поставимъ $-i$, найдемъ:

$$f(p-qi) =$$

$$f(p) + f'(p)(-qi) + f''(p)\frac{q^2i^2}{2} + f'''(p)\frac{(-q^3i^3)}{2.3}$$

$$+ f^{\text{IV}}(p)\frac{q^4i^4}{2.3.4} + f^{\text{V}}(p)\frac{(-q^5i^5)}{2.34.5} + \&$$

$$=\left(f(p)-f''(p)\frac{q^2}{2}+f^{\text{IV}}(p)\frac{q^4}{2.3.4}-\dots\right)-\left(f'(p)q-f'''\frac{q^3}{2.3}\right.$$
$$\left.+f^{\text{V}}(p)\frac{q^5}{2.3.4.5}-\dots\right)i.$$

Здѣсь вещественные члены тѣже, что и въ первомъ случаѣ, то означивъ ихъ по прежнему чрезъ P и Q, имѣемъ

$$f(p-qi)=\text{P}-\text{Q}i..$$

И такъ, ежели есть

$$f(p+qi)=\text{P}+\text{Q}i,$$

то всегда будетъ и

$$f(p-qi)=\text{P}-\text{Q}i.$$

Но для большей общности положимъ, что коэфиціенты функціи (1), $a, b, c, \dots k, l,$ всѣ вида $\alpha+\beta i$, говорю что и тутъ поставя вмѣсто x величину $p+qi$, получимъ

$$f(x)=f(p+qi)=\text{P}+\text{Q}i;$$

въ самой вещи подставя найдемъ

$$f(p+qi)=f(p)+qif'(p)+\frac{q^2i^2}{1.2}f''(p)+\dots..$$

Но функція $f(p)$ есть та же (1), въ которую вмѣсто x поставлено p, то будетъ

$$f(p)=(\alpha+\beta i)p^n+(\alpha'+\beta' i)p^{n-1}+\dots+\alpha^{(n)}+\beta^{(n)}i$$
$$=\text{P}_0+\text{Q}_0 i$$
$$f'(p)=n(\alpha+\beta i)p^{n-1}+(n-1)(\alpha'+\beta' i)p^{n-2}+\dots$$
$$=\text{P}_1+\text{Q}_1 i$$
$$f''(p)=$$
$$n(n-1)(\alpha+\beta i)p^{n-2}+(n-1)(n-2)(\alpha'+\beta' i)p^{n-3}+\dots$$

$$= P_2 + Q_2 i$$

. . . .

$$f^n(p) = 1.2.3 \ldots n(\alpha + \beta i) = P_n + Q_n i,$$

гдѣ P_0, P_1 и проч., Q_0, Q_1 и т. д. величины вещественныя. Сдѣлавъ

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = P$$
$$Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = Q$$

получимъ

$$f(x) = f(p + qi) = P + Qi,$$

подобное уравненію (3). Но здѣсь не будетъ уже

$$f(p - qi) = P - Qi,$$

какъ было доказано при вещественныхъ коэфиціентахъ, потому что мнимые знаки въ коэфиціентахъ этому помѣшаютъ, въ чемъ легко удостовѣриться.

Обратимся къ функціи (1), въ которой, полагая мнимые коэфиціенты, поставимъ вмѣсто x, $p + qi$, найдемъ

$$f(p + qi) = P + Qi.$$

Говорю, что для p и q могу выбрать такія вещественныя величины, что будетъ

$$P + Qi = 0,$$

или за одинъ разъ $P = 0$, $Q = 0$; или $P^2 + Q^2 = 0$ *), тогда $p + qi$ будетъ, по опредѣленію прежде сдѣланному, корень функціи (1).

---

*) Замѣтимъ, что сумма квадратовъ вещественныхъ величинъ, эти квадраты всегда положительные, иначе не можетъ быть равна нулю, если каждый изъ нихъ порознь не равенъ нулю. Если просто имѣемъ $x^2 + y^2 = 0$, и не

Чтобъ доказать, когда $f(p+qi)=\mathrm{P}+\mathrm{Q}i=0$, то и квадратъ модуля $\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2=0$, и на оборотъ, видимъ, что

$$\mathrm{P}=f(p)-f''(p)\frac{q^2}{2}+f^{\mathrm{IV}}(p)\frac{q^4}{2.3.4}-\ldots$$

$$\mathrm{Q}=f'(p)q-f'''(p)\frac{q^3}{2.3}+f^{\mathrm{V}}(p)\frac{q^5}{2.3.4.5}-\ldots$$

и при томъ функція (1), по положенію, цѣлая и раціональная функція отъ $x=(p+qi)$, степени n, то P и Q тоже цѣлыя и раціональныя функціи, степени n, количествъ p и q, слѣд. и проч.

Очевидно, что при разныхъ p и q, P и Q будутъ разныя, слѣд. квадратъ модуля $\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2$ будетъ имѣть разныя величины, всегда положительныя; отрицательнымъ быть не можетъ, слѣд. за нуль не переходитъ; возрастать можетъ до безконечности, но уменьшаться только до нѣкоторой положительной величины или до нуля; очевидно, что квадратъ модуля

$$\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2$$

непремѣнно имѣетъ наименьшую величину, можетъ быть нѣсколько ихъ, но одну непремѣнно.

Если эта наименьшая величина квадрата модуля не равна нулю, значитъ $\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2=0$ не можетъ быть ни при какихъ вещественныхъ величинахъ p и q, и тогда слѣд. $p+qi$ не удовлетворяетъ $f(x)=0$.

сказано именно, что x и y величины вещественныя, тогда другое дѣло: тутъ будетъ

$$x^2=-y^2$$

и

$$x=\pm yi.$$

Но мы покажемъ, что если не примемъ заразъ $P = 0$ и $Q = 0$, то квадратъ модуля: $P^2 + Q^2$, не будетъ наименьшій; тотчасъ для него найдемъ другую величину, которая будетъ еще меньше.

Допустимъ же, что $P^2 + Q^2$, квадратъ модуля мнимаго выраженія

$$P + Qi$$

есть наименьшій, а между тѣмъ P *и* Q *каждое порознь не равны нулю.*

Посмотримъ къ чему это приведетъ.

Въ функціи (1), которую мы уже представили такъ:

$$f(x) = f(p + qi).$$

Измѣнимъ $x = p + qi$ на количество очень малое, которое можемъ написать черезъ εu, и тогда x обтится въ

$$x + \varepsilon u = p + qi + \varepsilon u,$$

гдѣ ε число весьма малое, а u можетъ быть числомъ вещественнымъ или мнимымъ, положительнымъ или отрицательнымъ, однимъ словомъ, такимъ, которымъ можемъ располагать по произволу.

Вставя вмѣсто x эту новую величину $x + \varepsilon u$, въ функцію (1) и развернувъ въ рядъ, получимъ

$$f(x + \varepsilon u) = f(x) + f'(x)\varepsilon u + f''(x)\frac{\varepsilon^2 u^2}{1.2} + f'''(x)\frac{\varepsilon^3 u^3}{1.2.3} + \dots$$
$$+ f^n(x)\frac{\varepsilon^n u^n}{1.2.3.....n} \dots\dots\dots\dots\dots (4).$$

Здѣсь $f(x)$ уничтожиться не можетъ; это бы значило, что

$$f(x) = f(p + qi) = P + Qi$$

будетъ равна нулю, т. е. $P=0$, $Q=0$, за одинъ разъ; а мы, припомнимъ, нарочно допустили противное. Но $f'(x)$ или $f''(x)$ могутъ уничтожиться; и чтобы разсмотрѣть общій случай, положимъ, что нѣсколько производныхъ функцій сряду, или, пожалуй, еще и промежуточныя, уничтожились, такъ что самая малая степень ε въ оставшихся изъ производныхъ функцій есть ε^m, изъ (4) строки будетъ

$$f(x+\varepsilon u)=f(x)+f^m(x)\frac{\varepsilon^m u^m}{2.3\ldots\ldots m}+\ldots\&+a\varepsilon^n u^n\ldots\ldots(5).$$

Когда $m=2$, значитъ, недостаетъ втораго члена; когда $m=3$, $4\ldots$, значитъ уничтожились разомъ второй, третій, четвертый и т. д. члены.

Видѣли уже что

$$f(x)=f(p+qi)=P+Qi,$$

то и $f'(x)=f'(p+qi)$ будетъ то же вида

$$P_{,}+Q_{,}i$$

$$f''(x)=f''(p+qi)=P_{,,}+Q_{,,}i \text{ и т. д.}$$

И такъ чрезъ постановленіе $p+qi$ вмѣсто x всегда можемъ получить

$$f^m(x)=P'+Q'i.$$

Вставя эти величины въ функцію (5), найдемъ

$$f(x+\varepsilon u)=P+Qi+\ldots(P'+Q'i)\varepsilon^m u^m+\ldots+a\varepsilon^n u^n\cdots(6).$$

Отобравъ вещественные и мнимые члены, имѣемъ

$$f(x+\varepsilon u)=P+P'\varepsilon^m u^m+\ldots.+(Q+Q'\varepsilon^m u^m+\ldots.)i.$$

Квадратъ модуля этой мнимой функціи равенъ

$$(P+P'\varepsilon^m u^m+\cdots)^2+(Q+Q'\varepsilon^m u^m+\cdots)^2$$
$$=P^2+Q^2+2(PP'+QQ')\varepsilon^m u^m+\cdots\cdots\cdots(7).$$

Въ остальныхъ членахъ ε будетъ высшихъ степеней, изъ которыхъ самая большая, по положенію, есть n, такъ что m можетъ быть $= n$, но во всякомъ другомъ случаѣ меньше n.

Величину ε здѣсь могу взять такъ малою, что второй членъ будетъ больше суммы остальныхъ, и если онъ отрицательный, то квадратъ новаго модуля равный

$$P^2 + Q^2 + 2(PP' + QQ')\varepsilon m u_m,$$

будетъ меньше прежняго

$$P^2 + Q^2,$$

потому, что къ прежнему придается отрицательная величина.

Но этотъ второй членъ мы всегда можемъ сдѣлать отрицательнымъ, положивъ

$$u^m = \theta,$$

гдѣ $\theta = +1$, когда второй членъ самъ по себѣ отрицательный; или $\theta = -1$, когда онъ положительный. Изъ уравненія $u^m = \theta$ найдемъ корень u вида $a + bi$ (лекція I.), и вставя, получимъ

$$x + \varepsilon u = p + qi + \varepsilon(a + bi) = p + \varepsilon a + (q + \varepsilon b)i.$$

Вотъ при этой величинѣ x, квадратъ новаго модуля сдѣлается меньше прежняго. Стало быть какую бы конечную величину квадратъ модуля

$$P^2 + Q^2$$

ни получилъ, всегда можно сыскать другую меньше ее: но онъ долженъ имѣть наименьшую величину; отрицательною величиною быть не можетъ, т. е. черезъ нуль не переходитъ, слѣд. необходимо

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

и слѣд. $\qquad P + Qi = 0,$

и наконецъ, $p + qi$ будетъ корень функціи (1). Повторимъ, что онъ будетъ или мнимый, когда p и q имѣютъ вещественныя величины, или корень будетъ вещественный, когда $q = 0$.

Но одинъ случай нарушаетъ общность нашего доказательства, это, когда коэфиціентъ втораго члена, $PP' + QQ'$, не есть ни положительный, ни отрицательный, а равенъ нулю; однако сей часъ докажемъ, что и въ этомъ случаѣ, наименьшая величина квад мод. будетъ опять

$$P^2 + Q^2 = 0.$$

Въ самой вещи выше допустили, что P и Q разомъ не могутъ быть равны нулю; P′ и Q′ также не могутъ въ тоже время быть равны нулю, иначе вышло бы, что

$$f^m(x)\frac{\varepsilon^m u^m}{1.2.....m} = 0.$$

а мы эту функцію взяли неуничтожающеюся.

Замѣтивъ это, пусть

$$u^m = \theta i,$$

гдѣ $\theta = \pm 1$; такъ что корень $u^m = \theta i$ будетъ вида

$$u = a + bi$$

вставя въ функцію (6), получимъ

$$f(x + \varepsilon u) = P + Qi + \cdots + (P' + Q'i)\,\varepsilon^m\theta i$$
$$= P - Q'\varepsilon^m\theta + \cdots + (Q + P'\varepsilon^m\theta + \cdots)i.$$

Въ остальныхъ членахъ ε будетъ высшихъ степеней, нежели m.

Квадратъ новаго модуля найдется

$$(P - Q'\varepsilon^m\theta + \cdots)^2 + (Q + P'\varepsilon^m\theta + \cdots)^2$$
$$= P^2 + Q^2 + 2(P'Q - PQ')\theta\varepsilon^m + \cdots\cdots\cdots (8)$$

Но возразятъ, что и этотъ членъ $QP' - PQ'$ тоже можетъ быть равенъ нулю? — Уступаемъ, и дѣлаемъ въ одно время

$$QP' - PQ' = 0$$

и

$$PP' + QQ' = 0.$$

Помноживъ первое на Q получимъ

$$Q^2P' - PQQ' = 0;$$

помноживъ второе на P, имѣемъ

$$P^2P' + PQQ' = 0;$$

сложимъ, и будетъ

$$(P^2 + Q^2)\,P' = 0.$$

Въ тоже время получимъ еще

$$Q(PP' + QQ) = QPP' + Q^2Q' = 0$$
$$P(QP' - PQ') = QPP' - PQ^{2\prime} = 0$$

вычтемъ, и будетъ:

$$(P^2 + {}^2Q)Q' = 0.$$

Здѣсь или $P^2 + Q^2 = 0$, что намъ и нужно; или $P' = 0$ и $Q' = 0$, что невозможно, потому что

$$f^m(x)\frac{\varepsilon^m u^m}{1.2......m}$$

неравна нулю; и слѣд. *второй членъ функціи* (8)

$$QP' - PQ'$$

неможетъ быть равенъ нулю, въ одно время съ

$$PP' + QQ' = 0.$$

И этотъ второй членъ $QP' - PQ'$, черезъ θ могу всегда сдѣлать отрицательнымъ. Въ самой вещи, если онъ положительный, кладу $\theta = -1$, и квадратъ новаго модуля····(8), будетъ

$$= P^2 + Q^2 - 2(P'Q - QP')\varepsilon^m.$$

Если тотъ членъ самъ по себѣ отрицательный, дамъ $\theta = +1$, и нахожу квадратъ новаго модуля опять

$$= P^2 + Q^2 + 2(P'Q - PQ')\varepsilon^m$$

въ обоихъ случаяхъ квадратъ новаго модуля меньше прежняго $P^2 + Q^2$. Слѣд. прежній не есть величина наименьшая, какъ предполагали.

И такъ, пока модуль имѣетъ какую бы то ни было малую численную величину, до тѣхъ поръ онъ не есть наименьшій; слѣд. наименьшій будетъ тогда, когда у него не будетъ ни какой величины, т. е. когда

$$P^2 + Q^2 = 0,$$

а въ это же самое время и $P = 0$, $Q = 0$, слѣдственно:

Есть такія величины, вещественныя или мнимыя, или вообще вида $p + qi$, которыя будучи поставлены въ функцію (1) вмѣсто x, даютъ

$$f(x) = f(p + qi) = 0.$$

Эти то величины, $p + qi$, обращающія функцію (1) въ нуль, и названы нами *корнями* функціи.

Слѣд. *всякая цѣлая* и *раціональная функція* (1). *имѣетъ непремѣнно хотя одинъ корень вида*

$$p + qi,$$

который заключаетъ въ себѣ всѣ возможныя вещеили мнимыя величины. Для первыхъ всегда $q = 0$, а для вторыхъ p и q всегда вещественны.

Доказавши это на всѣ возможные случаи, мы тѣмъ самымъ доказали и другое, т. е. что если функція имѣетъ и другіе корни, то всѣ они разнятся только величинами p и q, но видъ сохраняютъ тотже

$$p + qi.$$

Эта теорема долго занимала прежнихъ Геометровъ. Ейлеръ первый доказалъ ее, но весьма продолжительными вычисленіями. д'Аламбертъ безъ успѣха трудился надъ ней. Коши очень много упростилъ. Мы дали здѣсь его доказательство.

Эта теорема должна предшествовать рѣшенію функцій, потому что рѣшить функцію, значитъ найти такую величину для x, которая обращала бы ее въ нуль. Безъ этой теоремы всегда бы могъ родиться вопросъ: существуетъ ли такакая величина, которая функцію обращаетъ въ нуль, или можетъ быть этотъ корень не будетъ ни вещественный, ни мнимый, вида $p + qi$, а какой нибудь, особаго, еще неизвѣстнаго намъ мнимаго вида? — Но теперь всѣ такія сомнѣнія уничтожаются.

Послѣ этого легко уже доказать, что всякая цѣлая и раціональная функція имѣетъ столько корней, сколько самый высшій показатель степени, содержитъ въ себѣ единицъ. Это мы сдѣлаемъ послѣ; а напередъ докажемъ одну теорему, которая часто будетъ встрѣчаться.

Теорема. Пусть x, та величина, которая будучи поставлена въ функцію (1), дѣлаетъ

$$f(x) = 0,$$

говорю, что $f(x)$ всегда дѣлится на цѣло на $x - x_{,}$, т. е.

$$\frac{f(x)}{x - x_{,}} = \varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ новая цѣлая функція.

Изъ элементарной Алгебры извѣстно, что $x^n - y^n$ дѣлится на цѣло на $x - y$, именно:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}$$

Пусть же

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + dx^2 + kx + l,$$

гдѣ коэфиціенты a, b, c и проч, какіе нибудь.

Вставя вмѣсто x корень его $x_{,}$, получимъ

$$f(x_{,}) = ax_{,}^n + bx_{,}^{n-1} + cx_{,}^{n-2} + \dots + dx_{,}^2 + kx_{,} + l$$
$$= 0.$$

Если изъ $f(x)$ вычтемъ $f(x_{,}) = 0$, т. е. ничего не вычтемъ, ибо вычитаемъ нуль, будетъ

$$f(x) = a(x^n - x_{,}^n) + b(x^{n-1} - x_{,}^{n-1}) + \dots$$
$$+ d(x^2 - x_{,}^2) + k(x - x_{,}).$$

Но, во второй части всѣ члены дѣлятся на $x - x_{,}$ то назвавъ частное чрезъ $\varphi(x)$, получимъ

$$\frac{f(x)}{x - x_{,}} = \varphi(x)$$

или $$f(x) = (x - x_{\text{I}})\varphi(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (9).$$

Хотя бы въ $f(x)$ коэфиціенты всѣ были вещественные, но $\varphi(x)$ вообще будетъ имѣть коэфиц. мнимые;

чтобъ въ этомъ удостовѣриться, возмемъ частный примѣръ. Пусть

$$f(x) = x^3 + ax + 1$$

и $x = x_{\prime}$ корень ея, вида $p + qi$, будетъ

$$f(x) = x_{\prime}^5 + ax_{\prime} + 1 = 0,$$

откуда

$$f(x) = (x^3 - x_{\prime}^3) + a(x - x_{\prime})$$

и

$$\frac{fx)}{x - x_{\prime}} = x^2 + xx_{\prime} + x_{\prime}^2 + a = \varphi(x).$$

но

$$x_{\prime} = p + qi;\ \ x_{\prime}^2 = p' + q'i;$$

слѣд.

$$\varphi(x) = x^2 + px + p' + a + (qx + q')i,$$

т. е. будетъ содержать мнимыя знаки.

Теперь докажемъ, что если функція съ вещественными коэфиціентами имѣетъ одного изъ множителей вида $x - p - qi$, то имѣетъ непремѣнно и другаго множителя вида $x - p + qi$.

Въ самой вещи, видѣли уже, что если

$$0 = f(p + qi) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i,$$

гдѣ $p + qi$ есть корень функціи (1), то имѣемъ разомъ $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$; но какъ въ это же время отъ постановленія въ ту самую функцію (1) вмѣсто x, $p - qi$, получаемъ выраженіе

$$\mathrm{P} - \mathrm{Q}i = f(p - qi),$$

гдѣ P и Q тѣ же что и въ первомъ случаѣ, оба равны нулю и дѣлаютъ

$$\mathrm{P} - \mathrm{Q}i = 0,$$

и $$f(p-qi)=0,$$

стало быть $p-qi$ есть точно также корень $f(x)$, какъ и $p+qi$.

И такъ, если функція съ вещественными коэфиціентами имѣетъ одинъ корень $x_1 = p+qi$, то будетъ имѣть и другой корень непремѣнно

$$x_2 = p - qi.$$

Легко доказать, что $f(x)$, дѣлясь на каждаго изъ своихъ множителей $x-x_1$ и $x-x_2$, дѣлится на цѣло и на ихъ произведеніе, т. е.

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)\,(x-x_2)} = \psi(x)$$

гдѣ уже $\psi(x)$ будетъ вещественная, потому что $f(x)$ веществ. по положенію; произведеніе

$$(x-x_1)\,(x-x_2)$$

также величина вещественная; въ чемъ легко удостовѣриться, подставя вмѣсто x_1 x_2 величины $p+qi$ и $p-qi$; и перемножа самымъ дѣломъ, получимъ

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) &= x^2-(p+qi)x+pqi-pqi\\ &\quad -(p-qi)x+p^2+q^2\\ &= x^2-2px+p^2+q^2\end{aligned}$$

функція цѣлая и вещественная.

ЛЕКЦІЯ III.

Разложеніе раціональныхъ функцій на линейные множители.

Отдѣленіе равныхъ корней.

Воротимся теперь къ формулѣ (9)

$$f(x) = (x - x_1)\varphi(x).$$

Здѣсь $\varphi(x)$ функція цѣлая, какъ и $f(x)$, но которой степень единицею меньше степени $f(x)$.

Для $\varphi(x)$ точно также можемъ найти величину x_2 такую, что $\varphi(x)$ будетъ дѣлиться на $x - x_2$ и дастъ въ частномъ цѣлую функцію $\psi(x)$, степени единицею меньше противъ $\varphi(x)$ или двумя меньше противъ $f(x)$, т. е. будетъ

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_2} = \psi(x),$$

$$\varphi(x) = (x - x_2)\psi(x) \cdots (10).$$

Поставя въ уравненіе (9), найдемъ

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\psi(x).$$

поступая подобнымъ образомъ сдѣлаемъ

$$\psi(x) = (x - x_3)\chi(x)$$
$$\chi(x) = (x - x_4)\omega(x) \text{ и. т. д.}$$

Повторимъ опять, что послѣ перваго множителя $x - x_1$ степень $\varphi(x)$ сдѣлалась единицею меньше противъ степени $f(x)$; степень $\psi(x)$ двумя меньше, степень $\chi(x)$ тремя, степень $\omega(x)$ послѣ четырехъ множителей, четырьмя единицами меньше противъ $f(x)$, которой степень есть n, такъ что послѣ $n-1$ множителей останется функція, которой степень будетъ $n-(n-1)=1$, т. е. послѣдняя функція найдется

$$\Phi(x) = ax + k,$$

отсюда

$$x = -\frac{k}{a} = x_n; \text{ и } k = -ax_n,$$

гдѣ x_n, обращающій

$$\Phi(x) = ax + k = a(x - x_n),$$

а потому и $f(x)$, въ нуль, будетъ корень ея, слѣд.

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(ax + k)$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x^n)\ldots(11).$$

Слѣд. всякую цѣлую функцію перемѣнной x, можно разложить на столько лин. множителей, сколько въ показателѣ n, высшей ея степени, единицъ.

Всякая функція степени n имѣетъ n корней; потому что полагая послѣдовательно

$$x = x_1 \quad x = x_2 \quad x = x_3 \cdots x = x^n.$$

функція (11) всякой разъ обратится въ нуль; или говоря другими словами, функція (1) имѣетъ n рѣшеній.

Уравненіе $\quad x^n - A = 0$

также имѣетъ n корней.

Изъ этого видимъ, что задача рѣшенія уравненій, т. е. разысканія корней, есть то же что и разысканіе множителей. Вообще замѣтимъ, что отысканіе корней становится гораздо проще, когда между ими есть какая нибудь зависимость, такъ напримѣръ, когда функція имѣетъ равные корни, и потому въ этомъ случаѣ различныхъ рѣшеній будетъ меньше числа единицъ въ степени n данной функціи, но линейныхъ множителей останется тоже самое число.

Положимъ напримѣръ, что

$$x_1 = x_2;\ x_4 = x_5;\ x_6 = x_7 = x_8$$

то уравненіе (9) напишется такъ:

$$f(x) = (x - x_1)^2 (x - x_3)(x - x_4)^2 (x - x_6)^3 (...)(x - x_n)$$

Множители $x - x_1$ и $x - x_4$ возвышенные во 2-ю степень даютъ по два корня $= x_1$ и x_4, и называются корни *двойные;* множитель $x - x_6$ возвышенный въ 3 степень, даетъ три корни равные x_6, которые всѣ вмѣстѣ называются *тройные,* еслибъ множитель былъ въ 4 степени, то корни назывались бы *четверными* и т. д. вообще, *кратными.* О послѣднемъ уравненіи говорится, что оно имѣетъ два корня двойныхъ, одинъ корень тройной и проч.

Покажемъ сперва способъ какъ узнавать, содержитъ ли функція кратные множители; а потомъ, какъ отдѣлять ихъ.

Проблема: найти производную

$$\Phi(x) = f(x)\varphi(x)\psi(x) \cdots\cdots (12)$$

произведенія нѣсколькихъ цѣлыхъ функцій. Перемноживъ самымъ дѣломъ, найдемъ, что это произведеніе будетъ вида

$$\Phi(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{B}x^{n-1} + \mathrm{C}x^{n-2} + \ldots$$

и по общему правилу взявъ производную каждаго члена, нашли бы производную

$$\Phi'(x) = n\mathrm{A}x^{n-1} + (n-1)\mathrm{B}x^{n-2} + (n-2)\mathrm{C}x^{n-3} + \ldots$$

Но постараемся сыскать производную безъ этаго разложенія, прямо.

Въ функціи (12) дадимъ x приращеніе h, то

$$\Phi(x+h) = f(x+h)\ \varphi(x+h)\ \psi(x+h)\ (\ldots)$$

но

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + h\Phi'(x) + \frac{h^2}{2}\Phi''(x) + \ldots\ldots (13).$$

Разложивъ такимъ образомъ всѣхъ множителей, получимъ

$$\Phi(x+h) = f(x+h)\ \varphi(x+h)\ \psi(x+h)\ (\ldots) =$$

$$\left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \ldots\right]\left[\varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + \ldots\right]$$

$$\left[\psi(x) + h\psi'(x) + \frac{h^2}{2}\psi''(x) + \ldots\right]\left[\ \ldots\ \right]$$

Перемножимъ самымъ дѣломъ: и отобравъ функціи имѣющія h, особо, h^2 и т. д., особо получимъ

$$\Phi(x+h) = f(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,(\ldots\ldots) + [f'(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,(\ldots)$$
$$+ \varphi'(x)f(x)\psi(x)(\ldots) + \psi'(x)f(x)\,\varphi(x)(\ldots) + \ldots]h + \ldots\ldots (14)$$

Сравнивъ (14) и (13) по правилу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ, найдемъ искомую производную

$$\Phi'(x) = [f(x)\ \varphi(x)\ \psi(x)\ (\ldots)]' =$$

$$= f'(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,(...) + \varphi'(x) f(x)\,\psi(x)\,(....)$$
$$+ \psi'(x) f(x)\,\varphi(x)\,(....) + ...$$

Законъ этой производной слишкомъ очевиденъ, чтобы на немъ останавливаться.

Положимъ теперь, что наша функція имѣетъ n корней равныхъ x_1; m корней равныхъ x_2; p корней равныхъ x_3 и т. д., получимъ

$$f(x) = (x - x_1)^n (x - x_2)^m (x - x_3{}^p)\,(\cdot\cdot\cdot)\cdot\cdot\cdot\cdot(15).$$

Назвавъ произведеніе всѣхъ множителей кромѣ перваго

$$(x - x_2)^m (x - x_3)^p (\cdot\cdot\cdot\cdot) = \varphi(x),$$

замѣтимъ, что въ $\varphi(x)$ нѣтъ множителей $x - x_1$; и слѣд она ни въ какомъ случаѣ не дѣлится на $x - x_1$; уравненіе (15) напишется такъ:

$$f(x) = (x - x_1)^n \varphi(x),$$

откуда, по (14)

$$f'(x) = (x - x_1)^n \varphi'(x) + \varphi(x)[(x - x_1)^n]' \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(16).$$

Чтобъ найти производную

$$[(x - x_1)^n]'$$

сдѣлаемъ

$$(x - x_{,})^n = xn - nx^{n-1} x_{,} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} x_{,}{}^2 - \ldots\ldots$$
$$\mp nxx_{,}{}^{n-1} \pm x_{,}{}^n.$$

Возмемъ производную каждаго члена, и будетъ

$$[(x - x_{,})^n]'$$
$$= nx^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} x_{,} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} x^{n-3} x_{,}{}^2 - \ldots$$
$$\mp nx_{,}{}^{n-1}$$

$$=n\left[x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}x_{,}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}x_{,}^{2}-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\mp x_{,}^{n-1}\right]=n(x-x_{,})^{n-1}.$$

Впрочемъ, извѣстно, что первая производная есть коэфиціентъ у 1-й степени h, въ разложеніи
$[(x-x_1)+h]^n=(x-x_1)^n+n(x-x_1)^{n-1}h+$
и проч., то

$$[(x-x_1)^n]'=n(x-x_1)^{n-1}.$$

Вставя въ уравн. (16) получимъ

$$f'(x)=(x-x_1)^n\varphi'(x)+n\varphi(x)(x-x_1)^{n-1}$$
$$=(x-x_1)^{n-1}[(x-x_1)\varphi'(x)+n\varphi(x)]\cdots(17).$$

Здѣсь множитель $(x-x_1)\varphi'(x)+n\varphi(x)$ не дѣлится на $x-x_1$ потому, что какъ выше замѣтили, $\varphi(x)$ не дѣлится на $(x-x_1)$;

Такимъ же образомъ сдѣлавъ

$$\varphi(x)=(x-x_2)^m(x-x_3)^p(\cdots\cdot)$$
$$=(x-x_2)^m\psi(x),$$

гдѣ $\psi(x)=(x-x_3)^p(\cdots\cdot\cdot)=(x-x_3)^p\chi(x)$; получимъ производныя

$$\varphi'(x)=(x-x_2)^{m-1}[(x-x_2)\psi'(x)+m\psi(x)]$$
$$\psi'(x)=(x-x_3)^{p-1}[(x-x_3)\chi'(x)+p\chi(x)].$$

Вставя вмѣсто $\varphi(x)$, $\psi(x)$ etc. $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ etc. ихъ величины въ уравненіе (17), найдемъ

$$f'(x)=(x-x_1)^{n-1}\{(x-x_1)(x-x_2)^{m-1}[(x-x_2)$$
$$(x-x_3)^{p-1}[(x-x_3)\chi'(x)+p\chi(x)]$$
$$+m(x-x_3)^p\chi(x)]+n(x-x_2)^m(x-x_3)^p\chi(x)\}$$
$$=(x-x_1)^{n-1}(x-x_2)^{m-1}(x-x_3)^{p-1}\{(x-x_1)$$

$$[(x-x_2)(x-x_3)\chi'(x)+p\chi(x)+m(x-x_3)\chi(x)]$$
$$+n(x-x_2)(x-x_3)\chi(x)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18).$$

И такъ видимъ 1-е, что въ производной $f'(x)$ есть всѣ тѣже кратные множители, что и въ $f(x)$, но степень ихъ единицею меньше. 2-е, что между $f(x)$ и ея производною $f'(x)$, въ случаѣ равныхъ корней, всегда есть общій наибольшій дѣлитель, который будетъ содержать всѣ равные множители въ степеняхъ единицею меньше, назвавъ его D, получимъ

$$D=(x-x_1)^{n-1}(x-x_2)^{m-1}(x-x_3)^{p-1}.$$

Но какъ $f(x)=(x-x_1)^n(x-x_2)^m(x-x_3)^p\chi(x)$, то раздѣля второе на первое, получимъ

$$\frac{f(x)}{D}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\chi(x)=A.$$

Далѣе видимъ опять, что между A и D етть непремѣнно общій наибольшій дѣлитель, который, назвавъ его d, равенъ произведенію линейныхъ множителей всѣхъ кратныхъ корней, какіе только входятъ въ $f(x)$, т. е.

$$d=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Потомъ раздѣливъ A на d, получимъ произведеніе остальныхъ одинарныхъ корней или $\chi(x)$, именно

$$\chi(x)=\frac{A}{d}\ldots.(19).$$

И такъ, чтобъ узнать, имѣетъ ли какая нибудь цѣлая функція равные корни, надобно: 1-е, сыскать ея производную функцію. 2-е, найти общаго наибольшаго дѣлителя между функціею данною и ея производною. Когда этотъ дѣлитель не заключаетъ въ себѣ перемѣнной x, т. е. когда онъ постоянное число, значитъ нѣтъ въ данной функціи и корней равныхъ.

3-е. Но когда общій наибольшій дѣлитель D нашли, тогда раздѣливъ на него данную функцію $f(x)$, получимъ функцію A, въ которой будутъ одни только линейные множители корней равныхъ и не равныхъ.

4-е. Сыскать еще общаго наибольшаго дѣлителя d, между D и A и сдѣлавъ

$$d = 0,$$

получимъ уравненіе такой степени, сколько въ данной функціи имѣлось кратныхъ корней. Останется только разрѣшить его, чтобъ найти равные корни.

5-е. Потомъ раздѣлить уравненіе A на втораго дѣлителя d, въ частномъ получится $\chi(x)$, т. е. произведеніе всѣхъ неравныхъ корней. Сдѣлавъ

$$\chi(x) = 0$$

и разрѣша это уравненіе, сыщемъ неравные корни.

Отсюда видимъ, что когда въ самой функціи есть кратные корни, и неравные корни, то можно разложить ее на два уравненія:

$$d = 0, \quad \chi(x) = 0.$$

Первое дастъ всѣ корни равные; а послѣднее всѣ корни не равные.

Впрочемъ равные корни, или лучше, множители, основываясь на доказанномъ, можно отдѣлить одни за другими отъ общаго наибольшаго дѣлителя D, поступая съ нимъ, какъ поступали съ $f(x)$; что видно изъ слѣдующаго.

Положимъ что дано уравненіе

$$f(x) = (4_1)\,(3_2)^2(5_4)^4(4_7)^7 \,\ldots\ldots\ldots (\alpha),$$

т. е. функція имѣетъ 4 корня неравные; 3 двойныхъ, 5 четверныхъ, 4 семерныхъ; написавши такъ, мы разумѣемъ:

(4_1)	даетъ	4	множителя	линейныхъ
$(3_2)^2$	„	6	„	„
$(5_4)^4$	„	20	„	„
$(4_7)^7$	„	28	„	„

Всего линейныхъ множителей въ уравненіи (α) 58, т. е. она будетъ 58 степени.

Но корней разной величины въ немъ

$$4 + 3 + 5 + 4 = 16.$$

Поступая по сказанному правилу, беру производную, будетъ

$$f' = (3_2)^1(5_4)^3(4_7)^6\ (\ldots\ldots).$$

Ищу общаго наибольшаго дѣлителя между f и f', назвавъ его D, будетъ

$$D = (3_2)^1(5_4)^3(4_7)^6$$

$$\frac{f}{D} = (4_1)\,(3_2)^1(5_4)^1(4_7)^1 = A,$$

т. е. тутъ буду имѣть всѣ 16 множителей въ первой степени. Нахожу наибольшаго дѣлителя между A и D, назвавъ его d, будетъ

$$d = (3_2)^1(5_4)^1(4_7)^1$$

$$\frac{A}{d} = 4_1$$

Эта функція будетъ заключать въ себѣ одни только неравные корни. Чтобъ отдѣлить двойные корни особо, тройные и т. д. тоже особо, замѣчаю, что двойные корни данной функціи, въ D сдѣлались простыми неравными, потому, что степень ихъ въ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ понижается единицею; всѣ прочіе будутъ еще кратные, но только тройные обратятся въ двойные, четверные въ тройные и т. д. По этому, для отдѣленія двойныхъ корней, мы можемъ взять D за начальную функцію, и разсматривая въ ней двойныя корни какъ неравныя (для однообразія будемъ подобныя величины означать тѣми же буквами только со знаками), получимъ

$$D = f_{,} = (3_2)^1 (5_4)^3 (4_7)^6$$

$$f_{,}' = (5_4)^2 (4_7)^5 \; (\ldots\ldots)$$

$$D_{,} = (5_4)^2 (4_7)^5$$

$$\frac{f_{,}}{D_{,}} = (3_2)^1 (5_4)^1 (4_7)^1 = A_{,}$$

$$d_{,} = (5_4)^1 (4_7)^1$$

$$\frac{A_{,}}{d_{,}} = (3_2)^1$$

Это уравненіе третьей степени доставитъ намъ двойные корни отдѣльно. Для составленія *уравненія отдѣльнаго* изъ тройныхъ корней, можемъ объ $D_{,}$ тоже сказать что передъ этимъ говорили объ D: дѣйствительно $D_{,}$ содержитъ въ себѣ тройные корни, какъ не равные, а прочіе всѣ пониженные двумя единицами; и потому поступая съ $D_{,}$ также какъ съ $f(x)$ и D, получимъ отдѣльно тройные корни.

$$D_{,} = f_{,,} = (5_4)^2 (4_7)^5$$

$$f'_{,,} = (5_4)^1 (4_7)^4 \; (\ldots\ldots)$$

$$D_{,,} = (5_4)^1 (4_7)^4$$

$$\frac{f_{,,}}{D_{,,}} = (5_4)^1(4_7)^1 = A_{,,}$$

$$d_{,,} = (5_4)^1(4_7)^1$$

$$\frac{A_{,,}}{d_{,,}} = 1$$

т. е. тройныхъ корней уравненіе не содержитъ. Для отдѣленія четверныхъ корней беру:

$$D_{,,} = f_{,,,} = (5_4)^1(4_7)^4$$

$$f'_{,,,} = (4_7)^3 \ (\ldots\ldots.)$$

$$D_{,,,} = (4_7)^3$$

$$\frac{f_{,,,}}{D_{,,,}} = (5_4)^1(4_7)^1 = A_{,,,}$$

$$d_{,,,} = (4_7)^1$$

$$\frac{A_{,,,}}{d_{,,,}} = (5_4)^1$$

уравненіе 5-й степени, слѣдовательно, 5 четверныхъ корней. Для отдѣленія пятерныхъ:

$$D_{,,,} = f_{IV} = (4_7)^3$$

$$f'_{IV} = (4_7)^2 \ (\ldots\ldots.)$$

$$D_{IV} = (4_7)^2$$

$$\frac{f_{IV}}{D_{IV}} = (4_7)^1 = A_{IV}$$

$$d_{IV} = (4_7)^1$$

$$\frac{A_{IV}}{d_{IV}} = 1$$

Пятерныхъ нѣтъ.

Для шестерныхъ:

$$D_{IV} = f_{V} = (4_7)^2$$

$$f'_{V} = (4_7)^1 \ (\ldots\ldots.)$$

$$D_v = (4_7)^1$$

$$\frac{f_v}{D_v} = (4_7)^1 = A_v$$

$$d_v = (4_7)^1$$

$$\frac{A_v}{d_v} = 1$$

и шестерныхъ нѣтъ.

Для семерныхъ:

$$D_v = f_{vi}(x) = (4_7)^1$$

$$f'_{vi} = 1.$$

И такъ D_v будетъ функція четвертой степени не содержащая въ себѣ равныхъ корней, неравные же она можетъ имѣть тѣ, которые въ $f(x)$ были семерные.

Отдѣливши такимъ образомъ особо множители неравные, множители двойные, четверные, семерные, стоитъ только функціи ихъ уравнить нулю: и рѣшивъ каждое уравненіе особо, найдемъ всѣ 16 корней данной функціи (α). Такимъ образомъ наша функція 58 степени разобьется на слѣдующія отдѣльныя уравненія:

$$\frac{A}{d} = (4_2)^1 = 0, \text{ четвертой степени.}$$

$$\frac{A_{\prime}}{d_{\prime}} = (3_2)^1 = 0, \text{ третьей степени.}$$

$$\frac{A_{\prime\prime\prime}}{d_{\prime\prime\prime}} = (5_4)^1 = 0, \text{ пятой степени.}$$

$$D_v = (4_7)^1 = 0, \text{ четвертой степени.}$$

Вотъ общій ходъ отдѣленія равныхъ корней.

Для поясненія всего этого, возмемъ частный примѣръ. 1. Пусть

$$f(x) = x^{13} - 6x^{12} + 10x^{11} + 7x^{10} - 41x^9 + 51x^8 - 33x^7 + 4x^6 + 68x^5 - 163x^4 + 179x^3 - 105x^2 + 32x - 4$$

ея производная

$$f'(x) = 13x^{12} - 72x^{11} + 110x^{10} + 70x^9 - 369x^8 + 408x^7 - 231x^6 + 24x^5 + 340x^4 - 652x^3 + 537x^2 - 210x + 32.$$

Ежели предложенная функція имѣетъ равные корни, то $f(x)$ и $f'(x)$ должны имѣть общаго наибольшаго дѣлителя. Разыскавши его извѣстнымъ способомъ, въ самой вещи находимъ

$$D = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 14x^2 + 9x - 2.$$

Раздѣливъ на него данную $f(x)$, получимъ

$$\frac{f(x)}{D} = x^7 - 2x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 = A.$$

Эта функція A, какъ видѣли, содержитъ въ себѣ всѣ линейные множители..

Между A и D есть свой общій наибольшій дѣлитель, разыскавъ который получимъ

$$d = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2.$$

Этотъ дѣлитель содержитъ въ себѣ кратные корни въ первой степени, такъ что сдѣлавъ

$$d = 0,$$

и сыскавъ корни этого уравненія, получимъ равные корни предложенной функціи.

Далѣе, раздѣля A на d получимъ уравненіе, содержащее всѣ неравные корни, именно

$$\frac{A}{d} = x^3 + x - 1.$$

Такимъ образомъ рѣшеніе $f(x)$ 13 степени, мы привели къ рѣшенію двухъ уравненій

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2 = 0 \ldots\ldots (d)$$

и

$$x^3 + x - 1 = 0; \ldots \frac{A}{d}.$$

Но неостанавливаясь на этомъ, мы можемъ отдѣлить двойные равные корни особо, тройные, четверные, однимъ словомъ, кратные корни, сколько ихъ есть, особо.

II. Въ самой вещи, поступимъ съ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ D, какъ поступали съ данною функціею $f(x)$. Имѣя

$$f_{,}(x) = D = x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 14x^2 + 9x - 2.$$

возмемъ производную

$$f'_{,}(x) = 6x^5 + 20x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 28x + 9.$$

Разыскавъ между ими общаго наибольшаго дѣлителя, получимъ

$$D_{,} = x^2 - 2x + 1,$$

потомъ

$$\frac{f_{,}(x)}{D} = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 2 = A_{,}$$

Ищемъ теперь общаго наибольшаго дѣлителя между $A_{,}$ и $D_{,}$ и находимъ

$$d_{,} = x - 1.$$

Раздѣливъ $A_{,}$ на $d_{,}$ получимъ

$$\frac{A_{,}}{d_{,}} = x^3 - x^2 - 3x + 2,$$

уравненіе, содержащее въ себѣ всѣ простые множители двойныхъ корней. И такъ теперь видимъ, что предложенная $f(x)$ имѣетъ три корня двойныхъ, которые найдемъ рѣша уравненіе

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0 \ldots \frac{A_{,}}{d_{,}}$$

III. Чтобъ отдѣлить тройные корни, поступимъ съ $D_{,}$, такъ какъ съ $f(x)$. Имѣя

$$f_{,,}(x) = D_{,} = x^2 - 2x + 1$$

возьмемъ ея производную

$$f'_{,,}(x) = 2x - 2,$$

или сокративъ на 2,

$$f'_{,,}(x) = x - 1$$

сыщемъ ихъ общаго наибольшаго дѣлителя,

$$D_{,,} = x - 1,$$

и потому

$$\frac{f_{,,}(x)}{D_{,,}} = x - 1 = A_{,,}$$

общій наибольшій дѣлитель между $A_{,,}$ и $D_{,,}$ какъ видно, есть

$$d_{,,} = x - 1,$$

и потому

$$\frac{A_{,,}}{D_{,,}} = 1.$$

Показываетъ, что тройныхъ корней нѣтъ; это можно было и такъ предвидѣть.

IV. Легко теперь отдѣлить четверные корни: потому что

$$f_{,,,}(x) = D_{,,} = x - 1$$

которой производная

$$f'_{,,,}(x) = 1, \quad d_{,,,} = 1,$$

показываетъ, что $x-1$ есть искомый множитель четверныхъ корней.

И такъ предложенная, 13 степени $f(x)$ рѣшается слѣдующими уравненіями

$$x^3+x-1=0\dots\dots\frac{A}{d}$$

гдѣ три корни не равные.

$$x^3-x^2-3x+2=0\dots\dots\frac{A_{,}}{d_{,}},$$

гдѣ простые множители двойныхъ корней.

Наконецъ

$$x-1=0\dots\dots\frac{A_{,,,}}{d_{,,,}}$$

даетъ одинъ корень четверной.

Такимъ образомъ $f(x)$ состоитъ изъ слѣдующихъ множителей

$$f(x)=(x^3+x-1)(x^3-x^2-3x+2)^2(x-1)^4.$$

Корни этихъ множителей разыщемъ въ послѣдствіи.

Теорема. Возмемъ какую нибудь функцію, съ вещественными коэфиціентами

$$f(x)=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots+kx+l\dots(20).$$

Выберемъ одинъ изъ ея корней s, вещественныхъ или мнимыхъ, будетъ

$$f(s)=0,$$

и докажемъ, что съ измѣненіемъ, *весьма малымъ*, коэфиціентовъ $a, b, c\dots, k, l$, измѣнится и корень s; но изъ вещественнаго можетъ перейти въ мнимый или изъ мнимаго въ вещественный, только тогда, когда функція имѣетъ двойные, тройные, четверные и т. д. корни, равные s.

Возмемъ α число весьма малое, и p, $q\cdots t$ какія нибудь вещественныя конечныя величины; перемѣнимъ коэфиціенты a, b, $c \ldots k$, l, въ $a+\alpha p$, $b+\alpha q$,... $l+\alpha t$; $f(x)$ перемѣнится въ $\Phi(x)$ и напишется такъ:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x^n + (a+\alpha p)x^{n-1} + (b+\alpha q)x^{n-2} + \cdots \\ &\quad + (l+\alpha t) \\ &= (x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \cdots + l) + \alpha[px^{n-1} \\ &\quad + qx^{n-2} + \cdots + t] \\ &= f(x) + \alpha F(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21).\end{aligned}$$

Уравненіе, которое будетъ имѣть мѣсто при всякихъ величинахъ x.

Съ измѣненіемъ коэфиціентовъ (20) и корень s $f(x)$ перемѣнится, положимъ, въ $s+\alpha h$, такъ что

$$\Phi(s+\alpha h) = 0.$$

Вставя въ (21) вмѣсто x, $s+\alpha h$, получимъ

$$\Phi(s+\alpha h) = f(s+\alpha h) + \alpha F(s+\alpha h) = 0 \cdots\cdots (22).$$

Разложимъ обѣ функціи, будетъ

$$f(s+\alpha h) = f(s) + \alpha h f'(s) + \frac{\alpha^2 h^2}{1.2} f''(s) + \&$$

$$F(s+\alpha h) = F(s) + \alpha h F'(s) + \text{etc.}$$

Число α можемъ взять такое малое, что каждый членъ сдѣлается больше суммы слѣдующихъ, которою можно пренебречь. Замѣтя это, уравненіе (22) напишемъ такъ

$$f(s) + \alpha h f'(s) + \alpha F(s) = 0.$$

I. Положимъ, что въ функціи (20) нѣтъ корней равныхъ; видѣли что

$$f(s) = 0,$$

то

$$\alpha h f'(s) + \alpha F(s) = 0,$$

откуда

$$h = -\frac{F(s)}{f'(s)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Когда s вещественный корень $f(x)$, то $F(s)$ и $f'(s)$ будутъ вещественныя; и новый корень $s + \alpha h$, также вещественный.

Когда s мнимый, вида $\alpha + \beta i$, то

$$F(s) = P_0 + Q_0 i, \quad f'(s) = P_1 + Q_1 i,$$

и

$$h = -\frac{P_0 + Q_0 i}{P_1 + Q_1 i} = P + Qi;$$

новый корень $s + \alpha h$ останется мнимымъ.

II. Положимъ, что функція (20) имѣетъ двойной корень s, т. е. два корня равные s, тогда въ разложеніи перваго члена функціи (22) напишемъ и вторую производную, остальные, по малости α, бросимъ и получимъ

$$f(s) + \alpha h f'(s) + \frac{\alpha^2 h^2}{1.2} f''(s) + \alpha F(s) = 0.$$

Но какъ при двойномъ корнѣ не только $f(s) = 0$, но и $f'(s) = 0$, то будетъ

$$\frac{\alpha^2 h^2}{1.2} f''(s) + \alpha F(s) = 0,$$

откуда

$$h^2 = -\frac{2F(s)}{\alpha f''(s)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

Здѣсь очевидно, что h будетъ мнимый, ежели

$$\frac{2F(s)}{\alpha f''(s)} \text{ будетъ } +$$

слѣдовательно корень $s+\alpha h$ сдѣлается изъ веществен. мнимымъ; но онъ останется вещественнымъ, когда

$$\frac{2F(s)}{\alpha f''(s)} \text{ будетъ } -;$$

ежели s есть мнимый, то $s+\alpha h$ можетъ сдѣлаться вещественнымъ, когда h будетъ мнимый, ибо можетъ случиться что αh уничтожитъ мнимую часть s.

III. Для тройнаго корня s, въ разложеніи функціи (22) будутъ

$$f(s)=0,\ f'(s)=0,\ f''(s)=0,$$

и

$$\frac{\alpha^3 h^3}{1.2.3}f'''(s)+\alpha F(s)=0$$

откуда

$$h^3=-\frac{6F(s)}{\alpha^2 f'''(s)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25).$$

Когда s вещественный, h будетъ имѣть одну величину вещественную, а двѣ мнимыя, т. е. корень два раза перейдетъ изъ вещественнаго въ мнимый.

Когда s мнимый, то, или всѣ три величины новаго корня $s+\alpha h$ будутъ мнимыя; или одна вещественная, а двѣ мнимыя, и дѣйствительно

Пусть $$s=a+bi$$

будетъ $$F(s)=F(a+hi)=p+qi$$

$$f'''(a+hi)=p'+q'i$$

и $$h^3=-\frac{6(p+qi)}{\alpha^2(p'+q'i)}=-\frac{6[(pp'+qq')+(p'q-q'p)]}{\alpha^2(p'^2+q'^2)}.$$

h^3 мнимое, то и h должно быть тоже мнимое; но въ частномъ случаѣ, $p'q-q'p=0$, h^3 выдетъ вещественный; слѣд. корень изъ мнимаго перейдетъ въ вещественный.

Подобныя заключенія выведемъ при четверныхъ, пятерныхъ и т. д. корняхъ.

ЛЕКЦІЯ IV.

Отдѣленіе корней.

Въ III. лекціи мы видѣли, что рѣшеніе уравненій съ какими угодно корнями: равными и не равными, можно свести на рѣшеніе уравненій съ неравными корнями. Поэтому вообще въ послѣдующихъ разысканіяхъ будемъ предполагать уравненіе, не имѣющее равныхъ корней. — Рѣшить такое уравненіе значитъ отыскать корни помощію коэфиціентовъ, которые даны въ числахъ; слѣдовательно дѣло въ томъ, чтобы имѣя функцію вида:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0\ldots.(1),$$

гдѣ a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ числа, опредѣлить x посредствомъ этихъ a_0, a_1, $a_2\ldots$, т. е. найти, какая функція количествъ a_0, a_1, $a_2\ldots$, есть величина x; или положивъ $x=\nabla(a_0, a_1, a_2\ldots)$ надобно опредѣлить знакъ ∇, т. е. какія алгебрическія дѣйствія должно произвести надъ a_0, a_1, $a_2\ldots$чтобъ имѣть величину x.

Здѣсь кстати замѣтить: многіе говорятъ, что мы не имѣемъ общаго рѣшенія уравненій выше 4-й степени; кто говоритъ это, тотъ говоритъ неправильно, неопредѣлительно; онъ вправѣ сказать, что мы вообще не имѣемъ рѣшенія уравненій выше 4-й степени посредствомъ радикаловъ; но не вправѣ сказать вообще что радик. есть необходимый путь рѣшенія уравненій. Напротивъ мы уже видѣли (лекц. I.), и еще покажемъ, что извлеченіе радикаловъ есть только частный случай рѣшенія уравненій. Справедливый ходъ дѣла будетъ тогда, когда станемъ искать способъ рѣшать уравненія, или находитъ корни, въ сущности самаго дѣла; тутъ можетъ быть откроются другія пути, идя по которымъ найдемъ корни. И дѣйствительно есть такой способъ: онъ называется *рѣшеніе уравненій,* и составляетъ особый родъ алгебрическаго дѣйствія, которые впредь будемъ представлять такимъ знакомъ

$$x = \nabla(a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots a_n),$$

гдѣ x коренъ функціи (1); a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ коэфиціенты ея.

Мы покажемъ, что этотъ знакъ

$$\nabla(\cdots\cdots)$$

Точно такъ же опредѣляетъ корни функціи, какъ напр.:

$$\sqrt[m]{A}$$

опредѣляетъ радикалы m степени изъ A, какъ $a+b$, ab, $\frac{a}{b}$ опредѣляютъ сумму, произведеніе, отношеніе двухъ количествъ a и b.

Этотъ знакъ ∇ выразитъ намъ свое алгебрическое дѣйствіе надъ уравненіемъ точно также ясно, удовлетворительно, какъ и тѣ знаки выражаютъ свои дѣйствіи.

Этотъ знакъ войдетъ у насъ въ составъ Алгебрическихъ и Трансцендентныхъ функцій. Мы будемъ производить надъ нимъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени, извлеченіе радикаловъ, рѣшеніе уравненій и дифференцированіе; мы его будемъ интегрировать.

„Алгебра посредствомъ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень, извлеченія радикаловъ, — *старается рѣшать уравненія*, и до сихъ поръ посредствомъ тѣхъ дѣйствій, дальше 4 степени вообще не рѣшила;“ вотъ какую мысль внушаютъ почти всѣ изложенія и разсужденія объ Алгебрѣ. — Ничего не бывало. Рѣшеніе уравненій совсѣмъ не цѣль ея, а средство, такое же какъ сложеніе, дѣленіе и проч., средство, которымъ, повторяю, она вполнѣ владѣетъ. Этимъ средствомъ или дѣйствіемъ, вмѣстѣ съ остальными своими дѣйствіями, она составляетъ функціи, анализируетъ, изслѣдываетъ свойства функцій, выражающихъ какой либо вопросъ, какую нибудь искомую истину, и чрезъ такія изслѣдыванія находитъ ее.

Этотъ переломъ въ образѣ сужденія о послѣднемъ Алгебрическомъ дѣйствіи — рѣшеніи уравненій, совершенно справедливъ, и необходимъ: онъ самъ собой выходитъ изъ сущности науки, онъ, мы это увидимъ, далеко разширитъ предѣлы Алгебрическаго Анализа. Знакъ ∇ употребленъ въ первый разъ на этихъ лекціяхъ.

Мы при всякомъ случаѣ станемъ наводить читателя на этотъ образъ сужденія, до тѣхъ поръ пока онъ самымъ дѣломъ убѣдится въ совершенной его необходимости.

Уравненія вообще рѣшаются всегда, но странно, почему хотятъ непремѣнно рѣшать ихъ посредствомъ извлеч. радикаловъ, т. е. хотятъ общій случай подчинить частному; это столько же справедливо, какъ и то, еслибъ кому вздумалось доискиваться способа, извлекать радикалы посредствомъ раціон. дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія; онъ никогда не извлечетъ ни одного радикала, пока не придумаетъ для него настоящаго дѣйствія; но коль скоро дѣйствіе пріискано, стоитъ только употребить для него приличный знакъ и — все кончено; точно тоже и о рѣшеніи уравненій. Послѣ докажемъ, что посредствомъ радик. вообще не можно рѣшать уравненій.

Другіе хотятъ рѣшать Алгебрическія уравненія посредствомъ Трансцендентныхъ дѣйствій; объ этомъ и говорить не будемъ: это противно сущности Алгебрическаго Анализа, Алгебрической функціи.

Изъ всего этаго заключаемъ, что рѣшить уравненіе, значитъ найти, какимъ образомъ произвести дѣйствіе означенное чрезъ ∇. Это дѣйствіе найдено; оно довольно похоже на извлеченіе радикаловъ; и состоитъ въ двухъ пріемахъ. Первый пріемъ, *отдѣляетъ* корни, т. е. находитъ два предѣла, между которыми заключается именно этотъ корень, а не другой; при извлеченіи радикаловъ этой части нѣтъ, потому что тамъ прямо видно, между какими предѣлами онъ находится. Другой пріемъ, послѣ отдѣленія корней, есть собственно *рѣшеніе* уравненій: *вычисленіе* корней и радикаловъ *).

---

*) Словомъ *радикалъ* будемъ называть выводъ извлеченія

Есть разные способы отдѣлять корни; изъ всѣхъ, самый изящный по теоріи, способъ Штурмовъ; съ него и начнемъ; но напередъ предложимъ нѣкоторыя теоремы, которыя и послѣ нужны будутъ.

Пусть предложенная функція $f(x)$; беру ея производную $f'(x)$; $f(x)$ и $f'(x)$ не будутъ имѣть общцаго дѣлителя, потому что ищемъ корни уравненія, не содержащаго равныхъ корней; дѣлимъ $f(x)$ на $f'(x)$ получаемъ остатокъ r_1, такъ что

$$f(x) = q_1 f'(x) + r_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

Степень r_1 менѣе нежели $f(x)$. При этомъ остаткѣ перемѣняемъ знакъ, т. е. полагаемъ

$$-r_1 = R_1 \cdots\cdots (a);$$

дѣлимъ теперь $f'(x)$ на R_1 получаемъ

$$f'(x) = q_2 R_1 + r_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2),$$

гдѣ r_2 остатокъ; при немъ перемѣнимъ знакъ, т. е. положимъ $$-r_2 = R_2 \cdots\cdots\cdots (b).$$

R_1 дѣлимъ на R_2 и получаемъ

$$R_1 = q_3 R_2 + r_3 \cdots\cdots\cdots (3).$$

При остаткѣ r_3 перемѣняемъ знакъ, т. е.

$$-r_3 = R_3 \cdots\cdots\cdots (c).$$

Подобнымъ образомъ и далѣе до тѣхъ поръ,

радикаловъ: $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[m]{h}$ и проч. есть радикалъ 2-й, m-й и проч. степени; а словомъ *корень* будемъ означать ту величину, которая обращаетъ какую нибудь $f(x)$ въ нуль. Употребленіе слова корень безъ разбора, при извлеченіи радикаловъ и при рѣшеніи уравненій, кажется и утвердило въ той мысли, что всѣ вообще уравненія могутъ рѣшаться помощію радикаловъ.

пока остатокъ будетъ: или функція x, неперемѣняющая знака, при какихъ бы ни было величинахъ его, наприм.: x^2+2, или число; остатокъ изъ одного числа состоящій непремѣнно долженъ быть; нулемъ онъ быть не можетъ, иначе предшедшій остатокъ сдѣлается дѣлителемъ между $f(x)$ и ея производною, и данное уравненіе допуститъ равные корни, что противно нашему предположенію.

Вставя теперь въ уравненіи (1), (2), (3)···вмѣсто r_1, r_2, r_3·····ихъ величины изъ уравненій (a), (b), (c)····получимъ новыя уравненія:

$$f(x)=q_1f'(x)-R_1\cdots\cdots\cdots(4)$$
$$f'(x)=q_2R_1-R_2\cdots\cdots\cdots(5)$$
$$R_1=q_3R_2-R_3\cdots\cdots\cdots(6)$$
$$R_2=q_4R_3-R_4\cdots\cdots\cdots(7).$$

Напишемъ рядъ

$$f(x), f'(x), R_1, R_2, R_3, R_4\cdots\cdots\cdots(8),$$

который имѣетъ слѣдующія свойства:

1) Два члена сряду въ (8) уничтожиться не могутъ; положимъ, что отъ какой нибудь величины x произошло $R_1=0$ и $R_2=0$, то для той же величины x, изъ уравненія (5) видно, что и $f'(x)=0$, а это вмѣстѣ съ $R_1=0$ принуждаетъ заключить, по уравненію (4), что и $f(x)=0$, т. е. $f(x)$ и $f'(x)$ имѣютъ общаго дѣлителя, или что тоже самое, въ $f(x)$ есть равные корни; это противно предположенію, слѣд. два члена сряду въ (8) уничтожиться не могутъ. Объ этомъ можно разсуждать еще и такъ: уравн. (6) показываетъ, что когда $R_1=0$ и $R_2=0$, будетъ, $R_3=0$; а при этомъ, изъ ур. (7), и $R_4=0$, и т. д., всѣ остатки сдѣлаются нулемъ. Но мы знаемъ, что по-

слѣдній остатокъ долженъ быть величиною никогда неизчезающею; поэтому ясно, два члена сряду уничтожиться не могутъ; большее число членовъ сряду и подавно не могутъ уничтожиться.

II. Поставимъ вмѣсто x какую нибудь величину a, и найдемъ знакъ каждаго изъ член. ряда (8); потомъ будемъ постепенно подставлять новыя числа и дойдемъ до x равнаго b; и если отъ этихъ различныхъ подстановленій ни одинъ изъ членовъ ряда (8) не уничтожится, т. е. не сдѣлается равнымъ нулю, то рядъ (8), какъ въ первомъ такъ и во второмъ случаѣ, будетъ имѣть тѣже самые знаки, потому что ни одна изъ функцій ряда (8) не можетъ перемѣнить знака не сдѣлавшись 0; слѣд. пока ни одна не уничтожится, до тѣхъ поръ ни какой перемѣны въ знакахъ не будетъ.

III. Чрезъ исчезаніе членовъ: $f'(x)$, R_1, R_2, R_3... ряда (8), одного или нѣсколькихъ, (но не сряду) между двумя данными величинами для x, хотя знаки будутъ другіе или въ другомъ порядкѣ, но число перемѣнъ *) знаковъ до исчезанія и послѣ исчезанія останется тоже. Дѣйствительно, положимъ что $R_2 = 0$, то изъ (6) видно, что $R_1 = -R_3$, т. е когда R_1 съ $+$, то R_3 съ $-$, и обратно; изъ этого видимъ, что члены смѣжные къ исчезающему, справа и слѣ-

*) *Перемѣною* знаковъ называется переходъ отъ $+$ къ $-$ или отъ $-$ къ $+$. Переходъ же отъ $+$ къ $+$ или отъ $-$ къ $-$ называется *постоянствомъ* знаковъ. Такъ рядъ знаковъ: $+ - - + - +$, имѣетъ 4 перемѣны и одно постоянство.

ва, имѣютъ противные знаки, такъ, что какой бы ни поставили знакъ вмѣсто 0, $+$ ли, $-$ ли, онъ доставитъ съ своими смѣжными только одну перемѣну, напримѣръ

$$f(x)\ f'(x)\ R_1\ \ R_2\ \ R_3\ \ R_4 \cdots$$

до исчезанія

$$x = \alpha - \omega \cdots + \ + \ + \ - \ - \ + \quad \text{одна перем.}$$

при исчезаніи R_2

$$R_2 = 0,\ x = \alpha \cdots\cdots + \ + \ + \ \ 0 \ - \ + \quad „ \quad „$$

послѣ исчезанія

$$x = \alpha + \omega \cdots + \ + \ + \ + \ - \ + \quad „ \quad „$$

гдѣ ω весьма малое число.

Написавши вмѣсто 0 $\pm$, получимъ тоже:

$+ \ - \ -$ одна перемѣна,

$+ \ \pm \ -$ одна перемѣна въ обоихъ случаяхъ,

$+ \ + \ -$ одна перемѣна.

Въ верхней, нижней и средней строкахъ будетъ по одной перемѣнѣ. Мы тутъ разсматривали одинъ уничтожающійся членъ ряда (8); но тоже самое найдемъ, если нѣсколько членовъ (не сряду) исчезаютъ, такъ, что *вообще исчезаніе членовъ ряда* (8), исключая $f(x)$, *не измѣняетъ* числа перемѣнъ знаковъ.

IV. До своего исчезанія $f(x)$ имѣетъ противный знакъ съ производною $f'(x)$, послѣ исчезанія тотъ же знакъ. Дѣйствительно, положимъ что $x = \alpha$ дѣлаетъ $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha)$ нулемъ быть не можетъ; иначе были бы равные корни въ $f(x)$. До исчезанія $f(x)$, x будетъ равенъ $\alpha - \omega$ и

$$f(\alpha - \omega) = f(\alpha) - \omega f'(\alpha) + \frac{\omega^2}{1.2} f''(\alpha) - \ldots \text{(I. лекц.)}$$

$f(\alpha) = 0$; ω вообще весьма малое число: знакъ второй части уравненія будетъ зависѣть отъ знака при $\omega f'(\alpha)$ (лекц. I.); и относительно знака можно написать:

$$f(\alpha - \omega) = - \omega f'(\alpha);$$

или $$f(\alpha - \omega) = - \omega f'(\alpha - \omega);$$

потому что $f'(\alpha)$ имѣетъ тотъ же знакъ что и $f'(\alpha - \omega)$; но ω величина *положительная*, слѣдовательно функція до уничтоженія имѣетъ знакъ *противный* съ производною. Посмотримъ, что будетъ послѣ уничтоженія, когда $x = \alpha + \omega$;

$$f(\alpha + \omega) = f(\alpha) + \omega f'(\alpha) + \frac{\omega^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots$$

$f(\alpha) = 0$; ω весьма малое положительное количество, его можно взять такимъ, что знакъ 2-й части будетъ зависѣть отъ знака при $\omega f'(\alpha)$; и относительно знака можно написать:

$$f(\alpha + \omega) = \omega f'(\alpha + \omega),$$

т. е. послѣ уничтоженія, функція и ея производная будутъ съ *тѣмъ же знакомъ*.

V. Основываясь на (I. лекція IV.) видимъ, что перемѣна знаковъ между $f(x)$ и $f'(x)$, существовавшая до исчезанія $f(x)$, дѣлается постоянствомъ знаковъ послѣ ея исчезанія; слѣд. до ея уничтоженія должно быть перемѣнъ знаковъ больше, а послѣ одного уничтоженія, одною меньше. Вспомнивъ еще (III.), можемъ сказать, что ежели отъ постановленія вмѣсто x въ рядъ (8), какихъ нибудь двухъ величинъ a и b, найдемъ, что число перемѣнъ знаковъ для $x = a$, единицею больше числа перемѣнъ знаковъ въ ряду (8) для $x = b$, то между этими предѣлами

a и b есть такая величина для x, которая дѣлаетъ $f(x) = 0$, т. е. между этими величинами заключается одинъ вещественный корень $f(x)$. Если же по-становя тѣ величины въ рядъ (8) найдемъ, что число перемѣнъ знаковъ унесется болѣе, наприм. 3, то заключимъ, что $f(x)$ три раза уничтожилась, т. е. для x между a и b есть три величины, которыя удовлетворяютъ $f(x) = 0$, или три вещественные корня.

VI. И такъ теорема Штурмова состоитъ въ слѣдующемъ: пишу рядъ (8)

$$f(x),\ f'(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4 \cdots\cdots\cdots\cdots (9);$$

ставлю въ каждый изъ членовъ (9) вмѣсто x, какую нибудь величину a, и смотрю какіе знаки отъ этаго каждый изъ нихъ принимаетъ; численныя величины тѣхъ количествъ намъ не нужны; эти знаки пишу одинъ послѣ другаго рядомъ; потомъ подставя также въ каждый изъ членовъ (9) другую, бо́льшую величину b, и розыскавъ знаки всѣхъ членовъ, пишу ихъ также въ строку; положимъ что

отъ $x = a$ получили $\cdots\ - \ + \ - \ + \ -$

„ $x = b$ „ $\quad - \ - \ - \ + \ -$

сосчитаемъ число перемѣнъ знаковъ въ 1-й и 2-й строкахъ, разность покажетъ число вещественныхъ корней $f(x)$, заключающихся между a и b. Здѣсь въ 1-й строкѣ перемѣнъ четыре, во второй двѣ, слѣдовательно уравненіе имѣетъ два корня между предѣлами a и b. Число перемѣнъ знаковъ во 2-й строкѣ всегда меньше числа перемѣнъ знаковъ въ 1-й, это слѣдуетъ изъ (V.), гдѣ доказали что $f(x)$ своимъ исчезаніемъ, при переходѣ x отъ меньшей величины къ большей, уноситъ одну перемѣну знаковъ. Такъ какъ здѣсь мы имѣемъ дѣло только съ знаками членовъ ряда (9), а не съ величинами ихъ, то ясно, что при нахожденіи остатковъ R_1, R_2, $R_3 \cdots$ (1), (2), (3), для удобности дѣленія имѣемъ полное право множить или дѣлить на цѣлое положительное число какой бы то ни было изъ этихъ членовъ; чрезъ это знаки при членахъ ряда (9) не измѣнятся.

VII. Основываясь на этомъ можно розыскать въ каждомъ уравненіи число вещественныхъ корней и предѣлы ихъ. Нпишемъ рядъ (9), и поставивъ сначала вмѣсто x очень большую отрицательную величину, $-\infty$, напишемъ въ строку произшедшіе отъ этого знаки; потомъ вмѣсто x подставимъ очень большую положительную величину, $+\infty$, и напишемъ вторую строку знаковъ; разность числа перемѣнъ знаковъ въ обѣихъ строкахъ будетъ равна числу вещественныхъ корней; наприм.

$$f(x) = x^3 - 3x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

или для простоты за $f'(x)$ возьму

$$x^2 - 1 \text{ и дѣлю } \frac{f(x)}{f'(x)}:$$

$$r_1 = -2x + 4; \quad R_1 = 2x - 4$$

или принимаю за $R_1 \cdots x - 2$

$$r_2 = 3, \quad R_2 = -3$$

ставлю въ рядъ и будетъ

$$x^3 - 3x + 4,\ x^2 - 1,\ x - 2,\ -3$$

при $x = -\infty$ знаки: $-\ +\ -\ -$

$x = +\infty$ „ $+\ +\ +\ -$

разность, одна перемѣна знаковъ, одинъ вещественный корень.

VIII. Ежели хотимъ узнать, сколько уравненіе имѣетъ веществ. корней положительныхъ, должно сдѣлать $x = 0$, и потомъ $x = +\infty$; для нашего примѣра.

$x = 0$ .... $+\ -\ -\ -$

$x = +\infty$ .... $+\ +\ +\ -$

разность между числомъ перемѣнъ въ обѣихъ строкахъ $= 0$, т. е. нѣтъ вещественнаго положительнаго корня ни одного. Для отысканія отрицательнаго вещественнаго корня должно сдѣлать:

$x = -\infty$ .... $-\ +\ -\ -$

$x = 0$ .... $+\ -\ -\ -$

т. е. одною перемѣною въ 1-й строкѣ больше, слѣдовательно отрицательный веществ. корень есть одинъ.

IX. Ежели отъ постановленія какой нибудь величины вмѣсто x, одинъ изъ членовъ ряда (9) сдѣлается нуль, то по (III) видимъ, что смѣжные съ нимъ члены будутъ съ противными знаками, слѣдовательно этотъ нуль можно или совсѣмъ не принимать, или приписать ему какой угодно знакъ. Примѣръ:

$$f(x) = x^5 - 1$$

$$f'(x) = 4x^4 \text{ или } x^4$$

$$r_1 = -1, \quad R_1 = +1$$

$$x^5 - 1,\ x^4,\ +1 \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

$x = -\infty$,	$-$	$+$	$+$		$-$	$+$	$+$		$-$	$+$	$+$
$x = +0$,	$-$	0	$+$	или	$-$	$+$	$+$	или	$-$	$-$	$+$
$x = +\infty$,	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$

Все равно, оставить ли нуль, или писать вмѣсто его $+$ или $-$, или ничего не писать. Строки знаковъ показываютъ, что $x^5 - 1 = 0$ имѣетъ одинъ вещественный корень заключающійся между $x = 0$ и $x = +\infty$, т. е. положительный.

X. Опредѣля число вещественныхъ корней, посмотримъ какъ отдѣлить ихъ, т. е. заключить каждый корень между двумя предѣлами или числами, изъ которыхъ одинъ меньше, а другой больше искомаго корня и между которыми не заключается другаго корня уравненія. Очевидно, что предѣлами корня будутъ два такія числа, отъ постановленія которыхъ вмѣсто x въ рядъ (9) будетъ разность въ числѣ перемѣнъ знаковъ $= 1$.

И такъ для отдѣленія корений стоитъ только подставлять въ рядъ (9) числа

$$0,\ 1,\ 10,\ 100 \text{ и т. д.}$$

до тѣхъ поръ пока получимъ тѣже знаки какъ и для $+\infty$; и по разности въ числахъ перемѣнъ, опредѣлимъ сколько корней заключается между каждыми изъ двухъ чиселъ. Если окажется только одинъ корень, отдѣленіе его кончено; если же нѣсколько, надо продолжать подстановленіе чиселъ. Ежели, на прим. между 10 и 100 окажется три корня, подставимъ 20, 30, 40; когда и теперь не отдѣлятся, и всѣ три окажутся между 30 и 40, надобно подставить 31, 32, 33 и т. д.

Для отдѣленіе отрицательныхъ корней, поступать такимъ же образомъ: ставить отрицательные числа

$$-1,\ -10,\ -100 \text{ и т. д.}$$

Послѣ увидимъ, какимъ образомъ отдѣливъ корни, вычислять ихъ по приближенію, т. е. продолжать сближеніе предѣловъ до того, чтобъ они разнились между собою такъ мало, какъ угодно.

XI. Способъ Штурмовъ, такой изящный по теоріи, утомителенъ въ приложеніи, отъ послѣдовательныхъ дѣленій; однако иногда его можно нѣсколько упрощать. Для этого разсмотримъ $f(x)$ и съ нею другую $F(x)$ такую, что она хоть одной степенью ниже $f(x)$, и не имѣетъ съ нею общаго дѣлителя.

Поступимъ съ $f(x)$ и $F(x)$ такъ, какъ мы поступали при выводѣ (4), (5), (6) и (7), получимъ

$$f(x) = qF(x) - R_1 \cdots\cdots\cdots (10)$$

$$F(x) = q_1 R_1 - R_2 \cdots\cdots\cdots (11)$$

$$R_1 = q_2 R_2 - R_3 \cdots\cdots\cdots (12).$$

Составивъ изъ этихъ величинъ рядъ

$$f(x),\ F(x),\ R_1,\ R_2,\ R_3 \cdots\cdots (13)$$

замѣчаемъ 1), что и здѣсь два члена вдругъ уничтожиться не могутъ, потому, что при уничтоженіи двухъ членовъ сряду, будетъ въ одно время $f(x)=0$ и $F(x) = 0$, т. е. они бы имѣли общаго дѣлителя, что противно предположенію.

2). Каковы бы $f(x)$ и $F(x)$ ни были, отъ исчезанія $F(x)$, R_1, $R_2 \cdots$ въ ряду (13), число перемѣнъ знаковъ не увеличится, и не уменьшится; это докажется также какъ и въ (III).

3). Ежели вмѣсто x поставимъ a, то получимъ строку знаковъ для членовъ ряда (13), потомъ поставя вмѣсто x, $b > a$, получимъ другую строку знаковъ; вотъ тутъ уже нельзя сказать, что число перемѣнъ знаковъ внизу меньше числа перемѣнъ знаковъ вверху, потому, что не знаемъ, до исчезанія $f(x)$, она имѣла тотъ же или противный знакъ съ $F(x)$. По этому же самому, и о начальной функціи $f(x)$ неможемъ сказать того, что сказали объ ней въ теоремѣ Штурмовой: что она своимъ исчезаніемъ уноситъ одну перемѣну знаковъ.

4). Но ежели выберемъ такую функцію $F(x)$, что начальная до своего исчезанія имѣетъ съ нею *противный* или *тотъ же* знакъ, т. е. перемѣну или постоянство знаковъ, то очевидно, что въ *первомъ* случаѣ, чрезъ исчезаніе $f(x)$, бывшая перемѣна знака, обратится въ постоянство, и слѣдовательно, число перемѣнъ знаковъ одною уменьшится; когда $f(x)$ уничтожится нѣсколько разъ, то уменьшится на столько же и число перемѣнъ. Въ *послѣднемъ* случаѣ, т. е. когда $f(x)$ имѣетъ съ $F(x)$ тотъ же знакъ, если $f(x)$ уничтожится разъ, постоянство обратится въ перемѣну знаковъ: одна перемѣна знаковъ прибавится; когда она уничтожится n разъ, прибавится n перемѣнъ знаковъ *).

*) Знаки при остаткахъ перемѣняемъ для того, чтобъ чрезъ уничтоженіе котораго нибудь изъ нихъ, число перемѣнъ.

Помощію (4) замѣчанія весьма часто можно сокращать вычисленіе. Для примѣра опредѣлимъ сколько вещественныхъ корней въ уравненіи:

$$f(x) = x^5 - 5x - 7.$$

Надобно по (4) найти такую функцію, которая бы до исчезанія $f(x)$ имѣла съ нею противный знакъ; такая функція, мы знаемъ, есть во первыхъ производная (IV.)

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1).$$

Но какъ $5(x^2+1)$ всегда положительная, слѣд. x^2-1 будетъ такая функція, что до исчезанія $f(x)$, она имѣетъ съ нею противный знакъ; по этому теперь вмѣсто сложной функціи $5(x^4 - 1)$ будемъ имѣть дѣло съ $x^2 - 1$; рѣшеніе еще сдѣлается проще, ежели отыскиваемъ положительные корни, тогда

$$(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1);$$

не измѣнялось. Дѣйствительно, ежели бы мы писали при остаткахъ тѣ же знаки, то

$$f(x) = F(x)q + r_1$$
$$F(x) = q_1 r_1 + r_2$$
$$r_1 = q_2 r_2 + r_3 \text{ и т. д.}$$

Чрезъ уничтоженіе одного изъ остатковъ, хоть $r_2 = 0$ r_1 и r_3 будутъ съ тѣми же знаками, и слѣдовательно, если до уничтоженія, r_2 имѣлъ тотъ же знакъ съ r_1 и r_3, то между ихъ знаками было постоянство; послѣ уничтоженія, r_2 будетъ имѣть противный знакъ съ r_1 и r_3, т. е. будутъ двѣ перемѣны; и такъ чрезъ уничтоженіе r_2, число перемѣнъ знаковъ увеличилось бы на 2; и могло бы уменьшиться на 2. Чтобъ уничтожить эту неопредѣленность, Штурмъ очень остроумно придумалъ предъ остатками перемѣнять знаки.

$x + 1$ при положительныхъ корняхъ имѣетъ всегда $+$, слѣдовательно $x - 1$ есть такая функція, что до исчезанія $f(x)$, она имѣетъ противный съ нею знакъ, и будетъ рядъ

$$x^5 - 5x - 7, \quad x - 1, \quad 11$$

$$x = 0, \quad - \; - \; +$$

$$x = \infty, \quad + \; + \; +$$

т. е. функція имѣетъ одинъ положительный корень.

Мы сказали прежде, что до этого же самаго можно достигнуть, взявши вмѣсто $f'(x)$ такую $F(x)$, которая до исчезанія имѣетъ тотъ же знакъ съ $f(x)$, разность выдетъ въ томъ, что здѣсь чрезъ каждое изчезаніе $f(x)$ перемѣна знаковъ прибавится.

Для примѣра возмемъ за такую функцию: $-f'(x)$ и предложимъ, найти сколько вещественныхъ корней имѣетъ уравненіе:

$$x^4 - 4x + 1$$

$f'(x) = 4x^3 - 4$ или $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$; $x^2 + x + 1$ всегда со знакомъ $+$, слѣдовательно $(-x + 1)$ будетъ имѣть тотъ же знакъ что и $f(x)$ и рядъ будетъ

$$x^4 - 4x + 1; \quad -x + 1; \quad 2.$$

$$x = -\infty, \quad + \; + \; +$$

$$x = +\infty, \quad + \; - \; +$$

т. е при переходѣ отъ меньшаго предѣла къ большему число перемѣнъ знаковъ увеличилось двумя, слѣдовательно, уравненіе имѣетъ два вещественные корня; они оба положительные.

Сдѣлаемъ еще частные примѣры: возмемъ уравн. $x^4 - 3x + 1$ и поступая съ нимъ какъ было сказано, получимъ рядъ:

$$x^4 - 3x + 1;\ \ 4x^3 - 3;\ \ 9x - 4;\ \ +1931$$

$x = -\infty$; $+\ -\ -\ +$ двѣ перемѣны,

$x = +\infty$; $+\ +\ +\ +$ ни одной перемѣны.

Слѣдовательно уравненіе $x^4 - 3x + 1$ имѣетъ два вещественныхъ и два мнимыхъ корня; положивъ

$$x = 0;\ \ +\ -\ -\ +;$$

найдемъ что оба вещественные корня положительные.

Пусть еще уравненіе:

$$3x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 36x + 211 = f(x) \cdots (14)$$

получимъ

$$f'(x) = 12x^3 - 36x^2 + 12x - 36 =$$

$$12(x^3 - 3x^2 + x - 3) = 12(x^2 + 1)(x - 3)$$

и воспользовавшись замѣчаніемъ что, $f'(x)$ и $x - 3$ всегда имѣютъ тѣже знаки, можемъ за $f'(x)$ принять $F(x) = x - 3$, и тогда получимъ рядъ:

$$3x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 36x + 211,\ \ x - 3,\ \ -76$$

$x = -\infty$ $+\ -\ -$ одна перемѣна

$x = +\infty$ $+\ +\ -$ „ „

слѣдовательно уравненіе (14) не имѣетъ ни одного вещественнаго корня, всѣ 4 мнимые.

Разсмотримъ буквенное уравненіе

$$x^2 + ax + b = 0 \cdots (a).$$

Взявъ производную и раздѣливъ послѣднюю на первую, получимъ въ остаткѣ $4b - a^2$. И такъ чтобъ узнать, сколько уравненіе (a) имѣетъ вещественныхъ корней, должно вмѣсто x подставить $-\infty$ и $+\infty$ въ слѣдующій рядъ:

$$x^2 + ax + b,\ 2x + a,\ a^2 - 4b.$$

Очевидно, здѣсь могутъ быть два случая, именно: или $a^2 - 4b > 0$, или $a^2 - 4b < 0$. Въ первомъ случаѣ, отъ подстановленія $x = -\infty$ и $+\infty$ получимъ слѣдующія двѣ строки знаковъ:

$$-\infty \cdots\cdots + \ - \ +,$$

$$+\infty \cdots\cdots + \ + \ +;$$

откуда видно, что когда $a^2 - 4b > 0$, то уравненіе (a) имѣетъ два вещественные корня. Во второмъ случаѣ будетъ

$$-\infty \cdots\cdots + \ - \ -.$$

$$+\infty \cdots\cdots + \ + \ -,$$

т. е. когда $a^2 - 4b < 0$, то въ уравненіи (a) нѣтъ ни одного вещественнаго корня.

Возмемъ уравн. 3-й степени $x^3 + ax + b = 0$, (β).

Поступая съ нимъ такимъ же образомъ будемъ имѣть:

$$x^3 + ax + b,\ 3x^2 + a,\ -(2ax + 3b),\ -(27b^2 + 4a^3).$$

Здѣсь могутъ быть три различные случая. Во первыхъ, пусть будетъ $a > 0$ и $27b^2 + 4a^3 > 0$; получимъ:

для $x = -\infty$, $-\ +\ +\ -$,

» $x = +\infty$, $+\ +\ -\ -$;

откуда видимъ, что при этомъ предположеніи уравненіе имѣетъ только одинъ вещественный корень.

Во вторыхъ, положимъ $a<0$, $27b^2+4a^3>0$; будетъ

$$\text{для} \; -\infty, \quad - + - -,$$

$$„ \quad +\infty, \quad + + + -;$$

здѣсь уравненіе (β) имѣетъ только одинъ веществен. корень.

Наконецъ, положимъ $a<0$ и $27b^2\;4a^3<0$; будетъ

$$\text{для} \; x = -\infty, \quad - + - +,$$

$$„ \quad x = -\infty, \quad + + + +.$$

Въ послѣднѣмъ случаѣ всѣ три корня уравненія (β) вещественные. Вставя вмѣсто x, 0 и $+\infty$ получимъ число корней вещественныхъ положительныхъ; а подставя вмѣсто x, $-\infty$ и 0, разность числа перемѣнъ знаковъ въ обѣихъ строкахъ покажетъ число корней отрицательныхъ.

Подобнымъ образомъ въ уравненіяхъ 4-й, 5-й... и вообще въ каждомъ уравненіи, можно отдѣлить вещественные, положительные и отрицательные корни.

Въ поясненіе X., прибавимъ здѣсь, что дабы сблизить предѣлы, между которыми находятся напр. полож. корни и отдѣлить ихъ, возмемъ вмѣсто $+\infty$ какую либо опредѣленную величину b. Если подстановленіе этой величины доставитъ столько же перемѣнъ знаковъ, сколько подстановленіе безконечности, то это значитъ, что всѣ положительные корни заключаются между 0 и b. Съ другой стороны поставимъ вмѣсто нуля количество a, больше нуля и меньше b, и положимъ, что нашли строку знаковъ, въ которой число перемѣнъ единицею меньше противъ числа полученнаго отъ подстановленія нуля. Изъ этого увидимъ, что одинъ изъ корней заключается между 0 и количествомъ a, а всѣ остальные между a и b. Подставляя потомъ попеременно вмѣсто b количества $\frac{a+b}{2}=a'$, $\frac{a+a'}{2}=a''$, $\frac{a+a''}{2}=a'''$, и т. д. отдѣлимъ всѣ корни такъ, что каждый изъ нихъ будетъ заключаться между извѣстными предѣлами.

Въ нашемъ уравненіи x^4-3x+1 имѣемъ

$$
\begin{array}{llcccc}
\text{для} & x=0, & + & - & - & + \\
\text{„} & x=+\infty, & + & + & + & + \\
\text{„} & x=2, & + & + & + & +
\end{array}
$$

$x=2$ доставляетъ столько же перемѣнъ знаковъ сколько и $x=+\infty$; слѣдовательно между 0 и 2 заключаются оба корня.

Поставимъ теперь $x=1$, будетъ

$$- \quad + \quad + \quad +$$

откуда видимъ, что одинъ коренъ заключается между 0 и 1, другой между 1 и 2.

Дальнѣйшее сближеніе предѣловъ увидимъ въ послѣдствіи.

ЛЕКЦІЯ V.

Отдѣленіе корней.

(Продолженіе.)

Свойства производныхъ функцій.

Не смотря на все изящество Штурмова способа, который сразу находитъ число веществ. корней между двумя извѣстными предѣлами, и потомъ отдѣляетъ ихъ, онъ, при высокихъ степеняхъ уравненій, утомителенъ своимъ послѣдовательнымъ дѣленіемъ.

Фурье предложилъ другой способъ находить и число и предѣлы вещественныхъ корней, какой бы высокой степени уравненіе ни было. Въ большей части случаевъ способъ его легче прилагается нежели Штурмовъ; но его теорія гораздо сложнѣе, его не такъ легко обнять, за то онъ послѣ очень простъ въ употребленіи. Мы постараемся изложить его со всею возможною ясностію; и для этого разсмотримъ сперва свойства производныхъ функцій, изъ которыхъ нѣкоторыя мы показали уже въ прежнихъ лекціяхъ. Предваряемъ читателя, что эти свойства надобно изучить внимательно, держать въ свѣжей памяти, иначе все послѣдующее будетъ невразумительно.

Пусть $f(x)$ цѣлая функція степени n съ вещественными коэфиціентами, неимѣющая равныхъ корней. Возмемъ всѣ ея производныя и напишемъ рядъ:

$$f(x), f'(x), f''(x) \ldots f^e(x), f^{e+1}(x) \ldots f^{e+5}(x) \ldots f^{e+6}(x) \ldots f^n(x).$$

Иногда для краткости будемъ и такъ писать:

$$f^0, f', f'' \ldots f^e, f^{e+1} \ldots f^{e+5}, f^{e+6} \ldots f^{n-1}, f^n \ldots . (1).$$

или такъ:

$$0, \text{I}, \text{II}, \text{III} \cdots e, e+1 \cdots e+5, e+6 \cdots n-1, n.$$

Послѣдняя, $f^n(x)$, всегда положительное число.

Каждую изъ функцій этого ряда можемъ принять за начальную, а слѣдующую, за ея первую производную; и что будемъ говорить о какой нибудь функціи $f(x)$, то можемъ примѣнить и къ каждой въ этомъ ряду, относительно слѣдующихъ за нею, кромѣ послѣдней. $f^0(x)$ и $f^n(x)$ будемъ называть *крайними;* всѣ остальныя, *средними.*

Прежде всего припомнимъ здѣсь тѣ свойства производныхъ функцій, которыя уже знаемъ (лекц. I.).

Поставя какую нибудь величину $x = a$, въ $f(x)$, мы найдемъ только численную величину ея, или ординату той кривой линіи *), которую изображаетъ $f(x)$; если $f(a) = 0$, кривая въ точкѣ $x = a$, пересѣкаетъ ось абциссъ, или $f(x)$ имѣетъ корень равный a; но еще не видимъ другихъ свойствъ этой функціи или кривой.

*) Здѣсь и впослѣдствіи, для большей очевидности Аналитическаго изложенія, будемъ вводить и кривыя линіи.

Когда ту же величину $x = a$, подставимъ въ первую производную $f'(x)$, найдемъ новое свойство $f(x)$, именно, что она, съ увеличенiемъ a, увеличивается или уменьшается. (Лекц. I.)

Извѣстно, въ кривыхъ линiяхъ, $f'(x)$ изображаетъ тригонометрическiй тангенсъ угла наклоненiя касательной въ точкѣ $[(x, f(x)]$ къ оси абциссъ. Знакъ $f'(x)$ покажетъ: если онъ $+$, что $f(x)$ или ординаты кривой увеличиваются, кривая *восходитъ;* если онъ $-$, ординаты уменьшают[redacted]кривая *нисходитъ,* относительно оси абциссъ. Когда $f'(a) = 0$, касательная въ точкѣ $[a, f(a)]$ параллельна оси, $f(x)$ имѣетъ наибольшую или наименьшую величину. Ежели $f(x)$ отъ нѣсколькихъ величинъ подобныхъ a, обращается въ нуль, значитъ, есть нѣсколько наибольшихъ и наименьшихъ, кривая идетъ извилинами.

Точнó такимъ же образомъ, подставя $x = a$, въ $f''(x)$, узнаемъ когда $f'(x)$, съ увеличенiемъ x, увеличивается или уменьшается. Знакъ $f''(x)$ покажетъ: если онъ $+$, что кривая вогнута: если онъ $-$, что кривая выпукла къ верху. Если $f''(a) = 0$, въ точкѣ $[(a, f(a)]$ кривая изгибается и т. д.

Однимъ словомъ, видимъ уже заранѣе, что рядъ (1) производныхъ функцiй, раскрываетъ всѣ возможныя свойства данной $f(x)$, а не одни корни ея, или точки пересѣченiя кривой съ осью абциссъ. Видимъ, что изслѣдованiе этихъ корней есть только частный случай изслѣдованiя всѣхъ свойствъ кривой линiи, изображаемой $f(x)$; и изъ одного этого убѣждаемся въ совершенной необходимости, изучать всѣ возможныя подробности свойствъ ряда (1) производныхъ функцій. И такъ

I. Если какая нибудь цѣлая функція $f(x)$ неисчезаетъ отъ постановленія $x=\alpha$, то ни отъ $x=\alpha-\omega$, ни отъ $x=\alpha+\omega$, (ω положительное очень малое число), она не будетъ нулемъ и не перемѣнитъ знака. Въ самой вещи:

$$f(\alpha-\omega)=f(\alpha)-\omega f'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}f''(\alpha)+\text{etc.}$$

$$f(\alpha+\omega)=f(\alpha)+\omega f'(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}f''(\alpha)+\text{etc.}$$

ω можемъ взять такое малое, что $f(\alpha)$ превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ членовъ (лекц. I.), поэтому: $a.$) Если $f(\alpha)$ не уничтожается, то не уничтожатся и $f(\alpha-\omega)$ и $f(\alpha+\omega)$. b). Если $f(\alpha)$ положительная или отрицательная, то $f(\alpha-\omega)$ и $f(\alpha+\omega)$ обѣ будутъ съ тѣмъ же знакомъ $+$, или $-$; и какъ намъ впослѣдствіи понадобятся только знаки функцій отъ постановленія вмѣсто x разныхъ чиселъ, то для краткости условимся писать ихъ такъ:

$$\begin{array}{lc} & f(x) \\ (\alpha-\omega)\cdots\cdots\cdots & + \\ (\alpha)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & + \\ (\alpha+\omega)\cdots\cdots\cdots & + \end{array}\left\}\text{ или такъ }\right\}\begin{array}{c} f(x) \\ - \\ - \\ - \end{array}\left\}\begin{array}{c}\text{или оба}\\ \text{случая}\\ \text{заразъ.}\end{array}\right\}\begin{array}{c} f(x) \\ \pm \\ \pm \\ \pm \end{array}$$

II. Если отъ постановленія $x=\alpha$, $f(x)$ уничтожается, т. е.

$$f(\alpha)=0,$$

то отъ $x=\alpha-\omega$ и $x=\alpha+\omega$ *), гдѣ ω малое поло-

---

*) Иногда вмѣсто $\alpha-\omega$ будемъ писать $<\alpha$; вмѣсто $\alpha+\omega$ будемъ писать $>\alpha$.

жительное число, $f(\alpha - \omega)$ и $f(\alpha + \omega)$ не исчезають, но имѣють противные знаки.

Въ самой вещи,

$$f(\alpha - \omega) = f(\alpha) - \omega f'(\alpha) + \frac{\omega^2}{2} f''(\alpha) + \text{etc.}$$

$$f(\alpha + \omega) = f(\alpha) + \omega f'(\alpha) + \frac{\omega^2}{2} f''(\alpha) + \text{etc.}$$

но по положенію, $f(\alpha) = 0$, то

$$f(\alpha - \omega) = - \omega f'(\alpha) + \frac{\omega^2}{1.2} f''(\alpha) + \text{etc.}$$

$$f(\alpha + \omega) = + \omega f'(\alpha) + \frac{\omega^2}{1.2} f''(\alpha) + \text{etc.}$$

ω можемъ взять такое малое, что первый членъ $\omega f'(\alpha)$ второй части превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ.

a.) Если $f'(\alpha)$ положительная, то $f(\alpha - \omega)$ будетъ съ $-$; $f(\alpha + \omega)$ съ $+$.

b.) Если $f'(\alpha)$ отрицательная, то $f(\alpha - \omega)$ будетъ съ $+$; $f(\alpha + \omega)$ съ $-$.

Вмѣсто того чтобъ говорить: „$f(x)$, уничтожающаяся при $x = \alpha$, имѣетъ до своего уничтоженія знакъ $-$“, будемъ писать

$$(<\alpha) \text{ или } (\alpha - \omega) \cdots \overset{f(x)}{-}$$

Вмѣсто того, чтобъ говорить: „$f(x)$ послѣ своего уничтоженія имѣетъ знакъ $+$,“ будемъ писать такъ:

$$(>\alpha) \text{ или } (\alpha + \omega) \cdots \overset{f(x)}{+}.$$

Уничтоженіе функціи отъ постановленія $x = \alpha$, будемъ писать такъ:

$$(\alpha) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \overset{f(x)}{0}.$$

Всѣ эти три случая вмѣстѣ, напишутся такъ:

$$\begin{array}{ll} & f(x) \\ (<\alpha)\cdots\cdots\cdots & - \\ (\alpha)\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ (>\alpha)\cdots\cdots\cdots & + \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} \text{ или } \left\{\begin{array}{c} f(x) \\ + \\ 0 \\ - \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{или оба} \\ \text{случая} \\ \text{заразъ} \end{array} \left\{\begin{array}{c} f(x) \\ \mp \\ 0 \\ \pm \end{array}\right.$$

III. Всякая цѣлая функція $f(x)$, несодержащая равныхъ корней, имѣетъ: до исчезанія, противный съ своею производною $f'(x)$, послѣ исчезанія, одинаковый знакъ.

Эта теорема уже доказана; лекція IV. — (IV.). Здѣсь для краткости ее будемъ писать такъ:

	f^0	f'		f^0	f'		f^0	f'
$(<\alpha)\cdots$	$-$	$+$		$+$	$-$		$\mp$	$\pm$
$(\alpha)\cdots$	0	$+$	или	0	$-$	или	0	$\pm$
$(>\alpha)\cdots$	$+$	$+$		$-$	$-$		$\pm$	$\pm$

IV. Отсюда имѣемъ право заключить, что если $f(x)$ и $f'(x)$, при постановленіи какой нибудь величины a, имѣютъ одинаковые знаки, постоянство, то $f(x)$ до тѣхъ поръ не можетъ уничтожиться, пока напередъ $f'(x)$ не перемѣнитъ своего знака, пока не дастъ съ нею *перемѣны*.

Но чтобы $f'(x)$ могла перемѣнить свой знакъ, надо ей сперва уничтожиться самой, отъ какой нибудь величины $\alpha > a$; а чтобы $f'(x)$ могла уничтожиться, надо (III.) ей прежде имѣть противный знакъ съ своею производною $f''(x)$.

Вотъ послѣ этого уничтоженія функціи f', крайная f^0 будетъ имѣть съ нею *перемѣну* знака, и получить возможность сдѣлаться равною нулю, при какой нибудь величинѣ

$$\alpha' > \alpha > a.$$

Слѣдующія строки объяснятъ это:

$$\begin{array}{llll}
 & f^0 & f' & f'' \\
(a)\cdots\cdots\cdots & + & + & - \\
(\alpha)\cdots\cdots\cdots & + & 0 & - \\
(>\alpha)\cdots\cdots & + & - & -\cdots\cdots(2). \\
(\alpha')\cdots\cdots\cdots & 0 & - & - \\
b>(\alpha')\cdots\cdots & - & - & -
\end{array}$$

Замѣчаемъ: 1.) въ строкѣ (a) одна перемѣна; f^0 отъ $x=\alpha'$, перейдя чрезъ нуль съ $+$ на $-$, унесла эту перемѣну, такъ что въ строкѣ (b) не осталось ни одной перемѣны.

Хотя f' прежде ее тоже перешла съ $+$ на $-$ отъ $x=\alpha$; но не унесла ни одной перемѣны; въ строкѣ $(>\alpha)$ также одна перемѣна, какъ и въ строкѣ (a), только на другомъ мѣстѣ.

2) $\alpha'>\alpha$, т. е. корень f^0 больше корня f', прежде ее уничтожившейся.

3) Въ строкѣ $(>\alpha')$ всѣ три функціи съ однимъ знакомъ; сталобыть f^0 въ другой разъ не можетъ уничтожиться прежде f'; f' не можетъ уничтожиться прежде f''; f'' тогда только можетъ уничтожиться, когда ея производная f''' будетъ имѣть съ нею противный знакъ. Положимъ, что это такъ и есть при величинѣ $b>\alpha'$, именно

	f	f'	f''	f'''
$b > (\alpha')$ ······	$-$	$-$	$-$	$+$
(α'') ········	$-$	$-$	0	$+$
$(> \alpha'')$ ······	$-$	$-$	$+$	$+$
(α''') ·······	$-$	0	$+$	$+$
$(> \alpha''')$ ·····	$-$	$+$	$+$	$+$
(α^{IV}) ········	0	$+$	$+$	$+$
$b' > (\alpha^{\text{IV}})$ ·····	$+$	$+$	$+$	$+$

Видимъ: что f'' уничтожится прежде другихъ при величинѣ $\alpha'' > \alpha'$, потому что f'' и f''' съ противными знаками.

f', въ строкѣ $(> \alpha'')$, получивши противный знакъ съ своею производною f'', можетъ теперь уничтожиться; и дѣйствительно будетъ равна нулю при нѣкоторой величинѣ $x = \alpha''' > \alpha''$.

Наконецъ послѣ всѣхъ ихъ, f^{0} имѣя въ строкѣ $(> \alpha''')$ перемѣну знака съ своею производною, можетъ уничтожиться при какой нибудь величинѣ $x = \alpha^{\text{IV}} > \alpha'''$.

Въ строкѣ $b' > (\alpha^{\text{IV}})$ всѣ четыре функціи имѣютъ постоянство знаковъ: ни одна изъ нихъ не можетъ уничтожиться, пока $f'''(x)$ не будетъ имѣть противнаго знака съ своею производною $f^{\text{IV}}(x)$. Но случилось, положимъ, что при величинѣ

$$b' > \alpha^{\text{IV}},$$

f''' f^{IV} и f^{V} имѣютъ одинъ и тотже знакъ, и только f^{VI} даетъ перемѣну съ своею производною f^{VII}. Напишемъ подобнымъ образомъ весь ходъ постепеннаго уничтоженія всѣхъ шести функцій:

	f^{0}	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}
$b'(>\alpha^{\text{IV}})$	+	+	+	+	+	+	+	—
(α^{V})	+	+	+	+	+	+	0	—
$(>\alpha^{\text{V}})$	+	+	+	+	+	+	—	—
(α^{VI})	+	+	+	+	+	0	—	—
$(>\alpha^{\text{VI}})$	+	+	+	+	+	—	—	—
(α^{VII})	+	+	+	+	0	—	—	—
$(>\alpha^{\text{VII}})$	+	+	+	+	—	—	—	—
(α^{VIII})	+	+	+	0	—	—	—	—
$(>\alpha^{\text{VIII}})$	+	+	+	—	—	—	—	—
(α^{IX})	+	+	0	—	—	—	—	—
$(>\alpha^{\text{IX}})$	+	+	—	—	—	—	—	—
(α^{X})	+	0	—	—	—	—	—	—
$(>\alpha^{\text{X}})$	+	—	—	—	—	—	—	—
(α^{XI})	0	—	—	—	—	—	—	—
$b''>(\alpha^{\text{XI}})$	—	—	—	—	—	—	—	—

Не повторая тѣхъ же поясненій, соединимъ теперь всѣ знаки съ самаго начала въ одно мѣсто.

	f^{0}	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}
(a)	+	+	—	+	+	+	+	—
(α)	+	0	—	·	·	·	·	·
$(>\alpha)$	+	—	—	·	·	·	·	·
(α')	0	—	—	·	·	·	·	·
$b>(\alpha')$	—	—	—	+	·	·	+	—
(α'')	—	—	0	+	·	·	·	·
$(>\alpha'')$	—	—	+	+	·	·	·	·
(α''')	—	0	+	+	·	·	·	·
$(>\alpha''')$	—	+	+	+	·	·	·	·
(α^{IV})	0	+	+	+	·	·	·	·
$b'>(\alpha^{\text{IV}})$	+	+	+	+	+	+	+	—
(α^{V})	+	+	+	+	+	+	0	—
$(>\alpha^{\text{V}})$	+	+	+	+	+	+	—	— (3)
(α^{VI})	+	+	+	+	+	0	—	—
$(>\alpha^{\text{VI}})$	+	+	+	+	+	—	—	—
(α^{VII})	+	+	+	+	0	—	—	—
$(>\alpha^{\text{VII}})$	+	+	+	+	—	—	—	—
(α^{VIII})	+	+	+	0	—	—	—	—
$(>\alpha^{\text{VIII}})$	+	+	+	—	—	—	—	—
(α^{IX})	+	+	0	—	—	—	—	—
$(>\alpha^{\text{IX}})$	+	+	—	—	—	—	—	—
(α^{X})	+	0	—	—	—	—	—	—
$(>\alpha^{\text{X}})$	+	—	—	—	—	—	—	—
(α^{XI})	0	—	—	—	—	—	—	—
$b''>(\alpha^{\text{XI}})$	—	—	—	—	—	—	—	—

Внимательное разсмотреніе этой таблицы, приведетъ къ заключеніямъ, которыя послѣ нужны будутъ.

1-е. Возмемъ въ строкѣ (a) только четыре знака отъ f''' до f^o.

f''' съ f'' дѣлаютъ перемѣну съ $+$ на $-$; въ тоже время f^o, въ строкѣ (α'), переходитъ черезъ нуль съ $+$ на $-$: уноситъ ту перемѣну; въ строкѣ (b) осталось только одна перемѣна.

f'' съ f' дѣлаютъ другую перемѣну въ строкѣ (a) съ $-$ на $+$; въ тоже время f^o въ строкѣ (α^{IV}) въ другой разъ переходитъ черезъ нуль съ $-$ на $+$, уноситъ другую перемѣну; въ строкѣ (b') все постоянства, не осталось ни одной перемѣны. Мы говоримъ только о знакахъ до f^{IV}.

Теперь возмемъ въ строкахъ (a) и (b) всѣ знаки отъ f^{VII} до f^o, и подпишемъ подъ каждымъ знакомъ счетъ перемѣнъ впереди его находящихся, начиная съ правой руки, слѣдующимъ образомъ:

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
(a)	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
	3	3	2	1	1	1	1	0
(b)	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
	2	2	2	1	1	1	1	0
РАЗНОСТИ:	1	1	0	0	0	0	0	0.

Вычтя соотвѣтственныя цыфры нижней строки изъ верхнихъ, получимъ строку *разностей*, уже написанную подъ чертою.

1, стоящая противъ f^o показываетъ, что она имѣетъ одинъ корень (α'), между предѣлами a и b, и мы сей часъ видѣли, что это такъ.

1, стоящая противъ f' показываетъ, что и первая производная имѣетъ одинъ корень (α) между a и b, что и справедливо.

Остальнымъ функціямъ соотвѣтствуютъ нули, и показываютъ, что ни одна изъ функцій отъ f'' до f^{vii}, между предѣлами a и b, неимѣютъ корней.

Точно такимъ же образомъ написавши строки (a) и (b'), найдемъ: которыя изъ функцій имѣютъ корни, и сколько, и которыя изъ нихъ неимѣютъ корней. Въ самой вещи

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
(a).....	+	+	—	+	+	+	+	—
	3	3	2	1	1	1	1	0
(b').....	+	+	+	+	+	+	+	—
	1	1	1	1	1	1	1	0
разности:	2	2	1	0	0	0	0	0.

Видимъ: что

f° имѣетъ между a и b' два корня: (α' и α^{iv})

f' имѣетъ два корня: (α и α''')

f'' имѣетъ одинъ корень: (α'').

Прочія функціи: f''', f^{iv}, f^{v}, f^{vi} и f^{vii} неимѣютъ между a и b' корней, что и справедливо.

Написавши такимъ же образомъ строки (a) и (b''), найдемъ

(a).....	+	+	—	+	+	+	+	—
	3	3	2	1	1	1	1	0
(b'')....	—	—	—	—	—	—	—	—
	0	0	0	0	0	0	0	0
разности:	3	3	2	1	1	1	1	0.

И дѣйствительно, между предѣлами a и b'': f^0 имѣетъ три корня: α', α^{IV}, α^{XI}; f' имѣетъ три корня: α, α''', α^{X}; f'' имѣетъ два корня: α'', α^{IX}; f''' одинъ: α^{VIII}; f^{IV} одинъ: α^{VII}; f^{V} одинъ: α^{VI}; f^{VI} одинъ, α^{V}.

Отсюда заключаемъ, что ни одна изъ старшихъ функцій въ ряду (1), имѣющая *одинаковый знакъ съ своею производною*, не можетъ уничтожиться прежде которой либо изъ своихъ младшихъ, больше или меньше отдаленной; и начиная отъ этой, долженъ напередъ уничтожиться послѣдовательно весь рядъ, и только тогда f^0 дойдетъ очередь исчезнуть. Корень ея больше всѣхъ корней младшихъ функцій, прежде ее уничтожившихся.

Въ таблицѣ (3) мы привели одинъ изъ безчисленныхъ частныхъ случаевъ, единственно для того, чтобъ дать идею, какимъ образомъ число перемѣнъ знаковъ въ строкѣ (a) всегда показываетъ число корней той изъ функцій ряда (1), которою примемъ за начальную; само собою разумѣется что при другомъ ходѣ знаковъ въ строкѣ (a), и порядокъ уничтоженія функцій будетъ другой; но при вещественныхъ корняхъ, всегда корень какой либо производной функціи заключается между двумя корнями начальной функціи: онъ *больше* малаго и *меньше* большаго. Напримѣръ:

Корень f'', α'', заключается между α и α''' корнями f', такъ

$$\alpha < \alpha'' < \alpha'''.$$

α''', корень f' заключается между α' и α^{IV}, корнями f^0, тоже такъ:

$$\alpha' < \alpha''' < \alpha^{\text{IV}}.$$

Другой корень f', α^{x}, заключенъ между α^{v} и α^{xi}, корнями f^{0}, тоже такъ:

$$\alpha^{iv} < \alpha^{x} < \alpha^{xi}.$$

α^{viii}, корень f''' заключенъ между α'' и α^{ix}, корнями f'' *).

V. Положимъ, что вмѣсто x поставили такую величину α, что нѣсколько среднихъ функцій ряда (1) отъ $x = \alpha$ сразу уничтожились **); посмотримъ сколько тогда унесется перемѣнъ знаковъ.

Здѣсь два случая: или число уничтожающихся членовъ *четное*, или *нечетное*.

---

*) Всякой легко убѣдится, что вторые корни f''', f^{IV}, f^{V} и f^{VI}, ежели только есть они, будутъ по ту сторону строки (a), т. е. всѣ они меньше a.

Въ самой вещи, начнемъ съ корня α, f': другой корень той же f' будетъ непремѣнно по ту сторону строки a, и меньше a.

Другой корень f'', принимая α'' за первый, будетъ по ту же сторону строки (a) и $<a$.

Другой корень f''' опять за строкою (a) и $<a$, потому, что при $x = a$, f''', имѣя одинаковый знакъ съ своею производною f^{IV}, не можетъ уничтожиться, пока не начнетъ уничтожаться f^{IV}.

Все это мы уже видѣли въ прим. 1 таб. (3), именно, что между a и b, f''', f^{IV}, f^{V}, f^{VI} не имѣютъ корней; стало быть малые корни ихъ, ежели только они есть, всѣ лежатъ по ту сторону строки (a).

**) Это значитъ, что нѣсколько производныхъ сряду имѣютъ кратныхъ множителей $x - \alpha$, т. е равные корни. Этого *a.*) Положимъ сперва что число ихъ *четное*, $2m$. *Для* большей ясности возмемъ $2m = 4$; и что скажемъ о четырсхъ, то скажемъ и о всякихъ $2m$.

Пусть же въ ряду (1) уничтожаются

$$f^{e+1} \quad f^{e+2} \quad f^{e+3} \quad f^{e+4}.$$

Смѣжныя съ ними уцѣлѣвшія функціи: справа f^{e+5}, слѣва f^{e}, могутъ имѣть или одинаковые знаки, т. е. когда у одной $+$, то и у другой $+$, когда у одной $-$, то и у другой $-$, или выражаясь разомъ: ко-

---

не можетъ случиться съ $f(x)$ и $f'(x)$, потому что $f(x)$, положили, не имѣетъ равныхъ корней; но во всѣхъ среднихъ функціяхъ это очень можетъ быть; такъ что если уничтожилось m членовъ сряду, значитъ въ старшемъ изъ нихъ есть множ. $(x-\alpha)^m$, въ слѣдующемъ $(x-\alpha)^{m-1}$... у m-й функціи множитель будетъ

$$(x-\alpha)^{m-(m-1)} = x-\alpha.$$

Тѣ члены, у которыхъ эти множители четныхъ степеней, (т. е. черезъ одинъ, идя отъ правой руки къ лѣвой) будутъ положительные: до уничтоженія, и послѣ уничтоженія, потому, что

$$\text{до уничтоженія: } [\alpha-(\alpha-\omega)]^{2,\,4,\,6 \text{ и проч.}} = (+\omega)^{2,\,4,\,6\ldots\ldots} = +$$

$$\text{по уничтоженіи: } [\alpha-(\alpha+\omega)]^{2,\,4,\,6\ldots} = (-\omega)^{2,\,4,\,6\ldots\ldots} = +$$

И такъ четные, по мѣсту, изъ уничтожающихся сряду членовъ (1), переходя черезъ нуль, не перемѣняютъ знака: если до уничтоженія своего имѣли $+$, то и послѣ уничтоженія останутся съ $+$; если имѣли $-$, то и останутся съ $-$. Видимъ, что теорема (II) имѣетъ мѣсто только для одной уничтожающейся функціи, нечетной.

гда у одной $\pm$, то и у другой $\pm$; или смѣжныя функціи могутъ имѣть противные знаки, т. е. выражаясь разомъ, когда у одной $\pm$, то у другой на оборотъ $\mp$. Разсмотримъ каждый случай особо.

a'.) Когда число $2m$ уничтожающихся сряду функцій *четное*, и притомъ смѣжныя имѣютъ *одинаковый* знакъ, то припомнивъ (I. II. и III.), обѣ строки знаковъ, до исчезанія и послѣ исчезанія напишутся такъ:

	f^e	f^{e+1}	f^{e+2}	f^{e+3}	f^{e+4}	f^{e+5}	
$(\alpha-\omega)$...	$\pm$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	до уничт.
(α)	$\pm$	0	0	0	0	$\pm$	
$(\alpha+\omega)$...	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	по „

Здѣсь по (I.), f^e и f^{e+5}, смѣжныя съ уничтожившимися, обѣ сохраняютъ одинъ и тотъ же знакъ $+$ или $-$: до уничтоженія, во время уничтоженія и послѣ уничтоженія промежуточныхъ функцій.

f^{e+4} до уничтоженія имѣетъ (III.) противный знакъ $\mp$, съ своею производною f^{e+5}, у которой знакъ, по положенію, $\pm$; послѣ уничтоженія, f^{e+4} получаетъ одинаковый съ нею знакъ, $\pm$.

По той же причинѣ (III.), f^{e+3} получаетъ до исчезанія знакъ $\pm$, противный знаку своей производной f^{e+4} и т. д. до послѣдней, идя отъ правой руки къ лѣвой.

Сосчитаемъ число перемѣнъ знаковъ: до уничтоженія ихъ 4, или вообще $2m$; послѣ уничтоженія не осталось ни одной.

Поэтому четное число уничтожающихся сряду функцій, когда у смѣжныхъ тѣже знаки, столько же уноситъ и перемѣнъ, $2m$.

a''.) Когда при *четномъ* же числѣ, $2m$, уничтожающихся сряду функцій, смѣжныя f^e и f^{e+5}, имѣютъ *разные* знаки, то всѣ обстоятельства напишутся слѣдующимъ образомъ:

	f^e	f^{e+1}	f^{e+2}	f^{e+3}	f^{e+4}	f^{e+5}	
$(\alpha-\omega)$...	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	до уничт.
(α).......	$\mp$	0	0	0	0	$\pm$	
$(\alpha+\omega)$...	$\mp$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	по »

Здѣсь тоже (III.) въ верхней строкѣ, отъ правой руки къ лѣвой, пойдутъ все перемѣны; въ нижней, все постоянства, кромѣ послѣдняго промежутка, гдѣ всегда будетъ одна перемѣна знаковъ.

До уничтоженія, 5 перемѣнъ, или $2m+1$; послѣ уничтоженія всегда сохранится одна перемѣна; унесется ихъ

$$(2m+1)-1=2m.$$

Поэтому и здѣсь, четное число уничтожающихся сряду функцій уноситъ тоже число перемѣнъ *).

b.) Положимъ теперь, что число уничтожающихся сряду функцій, *нечетное*, возмемъ 5, $=2m+1$, именно:

---

*) Въ обоихъ случаяхъ a'.) и a''.) замѣтимъ, что f^{e+3}, вторая изъ уничтожающихся (считая съ правой руки) и f^{e+1}, четвертая изъ нихъ, однимъ словомъ всѣ четныя, по мѣсту, переходя черезъ нуль, сохраняютъ тотъ же знакъ по уничтоженіи, какой имѣли до уничтоженія. Напротивъ, нечетныя, по мѣсту, f^{e+4} и f^{e+2}, перейдя черезъ нуль, перемѣняютъ свои знаки. Это потому (примѣч. V.), что у f^{e+1} есть множитель $(x-\alpha)^4$, у f^{e+2} множитель $(x-\alpha)^3$, у f^{e+3} множитель $(x-\alpha)^2$, наконецъ f^{e+4} имѣетъ множителя $x-\alpha$.

$$f^{e+1}\ f^{e+2}\ f^{e+3}\ f^{e+4}\ f^{e+5}$$

и разберемъ тоже два случая: когда знаки у смѣжныхъ съ ними, f^e и f^{e+6} тѣже, и когда эти знаки разные. И такъ

b'.) Когда отъ постановленія въ рядъ (1) $x=\alpha$, число $2m+1$, уничтожающихся сряду функцій *не четное*, а смѣжныя имѣютъ *одинаковый* знакъ, то переходы знаковъ напишутся такъ:

	f^e	f^{e+1}	f^{e+2}	f^{e+3}	f^{e+4}	f^{e+5}	f^{e+6}	
$(\alpha-\omega)\ldots$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	до уничт.
$(\alpha)\ldots\ldots$	$\pm$	0	0	0	0	0	$\pm$	
$(\alpha+\omega)\ldots$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	по „

до уничтоженія 6 перемѣнъ, вообще

$$(2m+1)+1=2m+2;$$

послѣ уничтоженія, ни одной.

Заключаемъ, что нечетное число, $2m+1$, уничтожающихся сряду функцій, когда смѣжныя имѣютъ тѣже знаки, уноситъ перемѣнъ

$$(2m+1)+1,$$

единицею больше числа функцій, но опять четное число $2m+2$.

b''.) При *нечетномъ* же числѣ, $2m+1$, уничтожающихся сряду функцій, когда у смѣжныхъ знаки *разные*, расположеніе ихъ будетъ слѣдующее:

	f^e	f^{e+1}	f^{e+2}	f^{e+3}	f^{e+4}	f^{e+5}	f^{e+6}	
$(\alpha-\omega)\ldots$	$\mp$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	до уничт.
$(\alpha)\ldots\ldots$	$\mp$	0	0	0	0	0	$\pm$	
$(\alpha+\omega)\ldots$	$\mp$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	по „

до уничтоженія 5 перемѣнъ, вообще

$$2m+1,$$

по уничтоженіи сохранится 1 перемѣна; унесется

$$(2m + 1) - 1 = 2m.$$

Сталобыть, при *нечетномъ* числѣ уничтожающихся сряду функцій, когда у смѣжныхъ знаки разные, уносится перемѣнъ единицею меньше числа функцій,

$$(2m + 1) - 1,$$

но опять четное же число

$$2m\ ^{*}).$$

Эти четыре частныя заключенія, a', a'', b' и b'', можно выразить такъ:

Уничтоженіе сряду четнаго *числа среднихъ функцій, уноситъ всегда* столько *же перемѣнъ знаковъ.*

Уничтоженіе нечетнаго *числа функцій сряду, уноситъ число перемѣнъ:* или единицею больше, *когда у смѣжныхъ функцій одинаковые знаки,* или единицею меньше, *когда у смѣжныхъ разные знаки.*

Но во всѣхъ случаяхъ число уносимыхъ перемѣнъ, четное.

Въ ряду (1) можетъ случиться нѣсколько партій уничтожающихся сряду функцій: тогда, смотря по четности или нечетности ихъ числа, и по знакамъ у смѣжныхъ съ каждой партіей, легко сосчитаемъ, сколько каждая партія порознь, и всѣ вмѣстѣ унесутъ перемѣнъ знаковъ.

---

*) Здѣсь такое же замѣчаніе, какъ и въ статьѣ a''.): что въ обоихъ случаяхъ, b'.) и b''.), четныя, по мѣсту, изъ уничтожающихся функцій, т. е. f_{e+4}, f_{e+2}.... переходя черезъ нуль, не перемѣняютъ своего знака, по причинѣ своихъ кратныхъ множителей $(x - \alpha)$, четныхъ степеней.

c.) **Положимъ теперь, что $f(x)$ имѣетъ равные** корни, и что отъ постановленія $x = a$, m функцій, начиная съ крайней, сряду уничтожились:

$$f^0 = 0,\ f^1 = 0,\ f^2 = 0 \ldots\ldots f^{m-1} = 0;$$

отчего строка знаковъ будетъ такая:

$$\begin{array}{lcccccc} & 0. & \text{I.} & \text{II.} & \text{III}\cdots\cdots & m-1. \\ (a)\cdots\cdots & 0. & 0. & 0. & 0\ \cdots\cdots & 0 \mp. \end{array}$$

Чтобъ получить знаки до уничтоженія, должно вспомнить, что каждая функція до уничтоженія имѣетъ противный знакъ съ своею производною, слѣд. первый нуль справа до уничтоженія замѣнится $\pm$; прочіе пойдутъ перемѣнами и будетъ строка знаковъ до уничтоженія:

$$\begin{array}{lcccccc} & 0. & \text{I.} & \text{II.} & \text{III}\cdots\cdots & & m-1. \\ (<a)\cdots & \mp & \pm & \mp & \pm\cdots\cdots & \pm & \mp. \end{array}$$

Послѣ уничтоженія, функціи съ своими производными имѣютъ тѣже знаки, и строка знаковъ напишется:

$$\begin{array}{lcccccc} & 0. & \text{I.} & \text{II.} & \text{III}\cdots\cdots & & m-1. \\ (>a)\cdots & \mp & \mp & \mp & \mp\cdots\cdots & \mp & \mp. \end{array}$$

Поставимъ ихъ вмѣстѣ:

$$\begin{array}{lccccccl} & 0. & \text{I.} & \text{II.} & \text{III}\cdots\cdots & m-2 & m-1. & \\ (<a)\cdots\cdots & \mp & \pm & \mp & \pm\cdots\cdots\ \mp & \pm & \mp & \text{до уничт.} \\ (a)\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0\qquad\quad 0 & 0 & \mp & \\ (>a)\cdots\cdots & \mp & \mp & \mp & \mp\cdots\cdots\ \mp & \mp & \mp & \text{по}\quad\text{,,} \end{array}$$

Въ строкѣ $(<a)$ столько перемѣнъ сколько исчезнувшихъ функцій въ строкѣ (a); но въ $(>a)$ всѣ эти перемѣны обратятся въ постоянства; поэтому перемѣнъ унесется столько, сколько исчезнувшихъ функцій: именно m; при четномъ m, четное, при нечетномъ, нечетное, не такъ какъ при исчезаніи среднихъ функцій. Замѣтимъ только, что послѣдняя изъ уничтожающихся функцій, $(m-1)$-я, имѣетъ множителя

$$(x-\alpha);$$

предпослѣдняя, $(m-2)$-я, имѣетъ множителя

$$(x-\alpha)^2.$$

Это замѣчаніе намъ пригодится.

ЛЕКЦІЯ VI.

Отдѣленіе корней.

Свойства производныхъ функцій.

(Продолженіе.)

VI. Въ предшедшей теоремѣ видѣли, сколько перемѣнъ уносится *явнымъ* исчезаніемъ среднихъ функцій. Явнымъ называемъ то, когда точно знаемъ отъ какой численной величины $x = \alpha$, тѣ функціи обращаются въ нуль.

Разсмотримъ теперь сколько перемѣнъ можетъ уносить *неявное* исчезаніе среднихъ функц. ряда (1).

Исчезаніе называемъ неявнымъ, когда неизвѣстно отъ какой точно величины x средняя функція обращается въ нуль; но знаемъ навѣрное, по указанію строки разностей, что она между двумя извѣстными числами можетъ уничтожиться одинъ или нѣсколько разъ.

Когда мы разсматривали явное исчезаніе (V.) среднихъ функцій, то для насъ достаточно было знать ихъ число и знаки у смѣжныхъ функцій, чтобъ судить о числѣ унесенныхъ ими перемѣнъ;

тамъ не требовалось численной величины функцій; но чтобъ узнать сколько перемѣнъ уносится неявнымъ исчезаніемъ среднихъ функцій, однихъ знаковъ недостаточно; тутъ необходима численная величина среднихъ функцій, и мы отложимъ это до одной изъ слѣдующихъ теоремъ; а теперь составимъ себѣ только идею: какимъ образомъ неявное исчезаніе среднихъ функцій, иногда уноситъ, иногда не уноситъ ни одной перемѣны. Для этого воротимся къ теоремѣ IV.

Въ таблицѣ (3) видѣли:

	0.	I.	II.	III.	
(a)	$+$	$+$	$-$	$+$	..... двѣ перемѣны.
(α)	$+$	0	$-$	$+$	.....
$(>\alpha)$	$+$	$-$	$-$	$+$	..... „ „

Между предѣлами (a) и $(>\alpha)$, f' показала неявное уничтоженіе, потому что перемѣня $+$ на $-$, она перешла черезъ нуль; но своимъ уничтоженіемъ не унесла ни одной перемѣны: (въ строкѣ (a) двѣ перемѣны, и въ строкѣ $(>\alpha)$ тоже двѣ, только на другомъ мѣстѣ); это потому, что смѣжныя съ нею, f^0 и f'', съ разными знаками (V. b'').

Точно также, f'' между предѣлами b и $>\alpha''$ оказала неявное уничтоженіе (см. таб. 3), перейдя съ $-$ на $+$ черезъ нуль; но опять не унесла своимъ исчезаніемъ ни одной перемѣны: (въ строкѣ (b) была одна перемѣна, въ строкѣ $(>\alpha'')$ осталась одна перемѣна), и это потому, что смѣжныя съ нею, f' и f''', имѣютъ противные знаки.

Однимъ словомъ, исчезаніе всѣхъ среднихъ функцій въ таблицѣ (3) не унесло ни одной перемѣны изъ строки (a). Только одна функція f^0, своимъ трекратнымъ исчезаніемъ унесла ихъ три.

Все это объясняется слѣдствіемъ таблиц. (3). Пока корень, которой либо изъ среднихъ производныхъ, находится между двумя корнями ея начальной функціи, т. е. будетъ больше малаго и меньше большаго изъ ея корней, до тѣхъ поръ уничтоженіе среднихъ функцій не можетъ унести ни одной перемѣны знаковъ, потому что при этомъ условіи, всегда у функцій смѣжныхъ съ исчезающею, будутъ противные знаки. (V. — b''.)

Но очень часто бываетъ, что корень первой производной, не заключается между двумя корнями своей начальной, или лучше, что производная уничтожается *прежде* своей начальной; въ такомъ случаѣ, исчезаніе той средней функціи можетъ унести двѣ перемѣны; начальная функція не можетъ своимъ уничтоженіемъ унести двухъ перемѣнъ, потому что нечего уносить; стало быть ей недостанетъ двухъ корней, а по счету они должны быть, то такіе недостающіе корни и называются *мнимыми*.

Чтобъ это объяснить примѣромъ, возмемъ изъ таблицы (3) теор. IV. строки (a) и (b'):

	0.	I.	II.	III.
$(a)\cdots$	$+$	$+$	$-$	$+$
	2	2	1	0
$(b')\cdots$	$+$	$+$	$+$	$+$
	0	0	0	0
разности:	2	2	1	0.

Между предѣлами a и b', видимъ неявное уничтоженіе трехъ функцій: f'' можетъ уничтожиться разъ, f' и f^0 могутъ уничтожиться по два раза.

Если корень f'' ляжетъ между двумя корнями f', то все это исполнится въ томъ порядкѣ, какъ показываетъ таблица (3). Но если f'' исчезнетъ отъ $x = c < a$ прежде f' и f^0, тогда она унесетъ двѣ перемѣны, потому что смѣжныя имѣютъ одинаковые знаки (V. b'). Въ самомъ дѣлѣ

	0.	I.	II.	III.
(a) ·······	+	+	—	+
(c) ·······	+	+	0	+
$(>c)$ ·····	+	+	+	+.

Въ строкѣ $(>c)$ не осталось ни одной перемѣны; она вышла тожественна съ строкою (b'); стало быть для α и α''' корней f', и для α' и α^{IV}, корней f^0, нѣтъ мѣста, они не существуютъ, и въ то же время строка разностей

2 2 1 0

показываетъ, что f' и f^0 должны имѣть по два корня; слѣд. у обѣихъ они мнимые.

Повторимъ заключеніе: если корень производной функціи лежитъ между двумя корнями ея начальной, то исчезаніе той функціи не уноситъ ни одной перемѣны знаковъ. Напротивъ, если производная исчезаетъ прежде начальной, и притомъ смѣжныя имѣютъ одинаковые знаки, то ея исчезаніе унесетъ двѣ перемѣны.

VII. Теперъ легко понять, что если въ ряду производныхъ функцій, которая нибудь изъ среднихъ имѣетъ два корня мнимые, то и всѣ старшія функціи до f^0 включительно *), непремѣнно имѣютъ по два корня мнимыхъ.

Положимъ, что отъ постановленія въ рядъ (1) вмѣсто x двухъ величинъ a и b, получили двѣ строки знаковъ, подъ которыми подпишемъ счетъ перемѣнъ и возмемъ разности:

	0	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
(a)	+	+	—	—	+	—	+	+	—	+	—	+
	8	8	7	7	6	5	4	4	3	2	1	0
(b)	+	+	+	+	—	+	+	+	+	+	—	+
	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	0
разности:	4	4	3	3	3	3	2	2	1	0	0	0

Изъ строки разностей видимъ, что между a и b f^{VIII} оказываетъ неявное исчезаніе одинъ разъ, f^{VII} два раза. Положимъ, что мы какимъ нибудь образомъ удостовѣрились, что f^{VIII} уничтожается прежде f^{VII}, отъ величины $x = c$; смѣжныя съ ней f^{IX} и f^{VII} обѣ съ одинаковымъ знакомъ, стало быть f^{VIII} своимъ уничтоженіемъ унесетъ двѣ перемѣны знаковъ; а черезъ это f^{VII} лишится воз-

---

*) И даже до безконечности, если чрезъ послѣдовательное интегрированіе, начиная съ f^0 составимъ возрастающій рядъ производныхъ функцій, такимъ образомъ:

$${}'f(x) = \int f^0(x)dx + A_0;\quad {}''f(x) = \int {}'f(x)dx + A_1$$

$${}'''f(x) = \int {}''f(x)dx + A_2$$ и т. д. до какой угодно степени μ, и напишемъ рядъ

$${}^{\mu}f(x),\quad {}^{\mu-1}f(x),\quad {}^{\mu-2}f(x)\ldots{}'f(x),\ f^0(x)\ldots f^e\ldots f^n(x)\ldots$$

Если въ f^e два корня мнимые, то во всемъ ряду отъ f^e до ${}^{\mu}f$ будетъ по два корня мнимыхъ.

можности два раза перейти черезъ нуль: въ первый разъ съ + на —, во второй, съ — на +; равно и для каждой изъ f^{VI}, $f^{\mathrm{V}} \ldots f^{0}$ недостанетъ двухъ перемѣнъ, не достанетъ возможности перейти два раза черезъ нуль; у всѣхъ ихъ, начиная съ f^{VII}, будетъ по два корня мнимыхъ, слѣд. и проч. *).

---

*) Докончимъ нашъ разборъ:

Написавши строку разностей особо, вычтемъ цыфру 2 изъ всей строки, начиная съ f^{VII}, найдемъ

0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
4	4	3	3	3	3	2	2	1	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2				
2	2	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0.

Чтобъ показать, что мы всегда вправѣ дѣлать это исключеніе мнимой пары изъ всего ряда, сыщемъ точно такую же строку иначе: мы положили, что f^{VIII} исчезаетъ при $x = c$; переходя съ — на +; слѣд. послѣ ея исчезанія строка знаковъ напишется:

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
$(>c)$....	+	+	—	—	+	—	+	+	+	+	—	+
	6	6	5	5	4	3	2	2	2	2	1	0
(b).....	+	+	+	+	—	+	+	+	+	+	—	+
	4	4	4	4	3	2	2	2	2	2	1	0
	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

строка разностей точно такая же, только здѣсь f^{VIII} уже исчезла. Видимъ что функціи V., IV., III. и II. должны между c и b исчезнуть по разу, f' и f^{0} по два раза. Посмотримъ въ какомъ порядкѣ онѣ будутъ уничтожаться одна послѣ другой; а этотъ порядокъ долженъ быть таковъ, чтобы всѣ функціи своимъ исчезаніемъ унесли только двѣ перемѣны, и чтобы въ новой строкѣ, слѣдующей тотчасъ послѣ исчезанія, были точно тѣже знаки, какъ въ строкѣ (b).

VIII. Всѣ случаи неявнаго исчезанія среднихъ функцій могутъ быть сведены на два слѣдующіе:

	0.	I.	II.			0.	I.	II.
(a)...	+	—	+		(a)...	—	+	—
A.	2	1	0	B.		2	1	0
(b)...	+	+	+		(b)...	—	—	—
	2	1	0			2	1	0.

Разсмотримъ тотъ и другой особенно: въ A уничтоженіе можетъ произойти двоякимъ образомъ:

начиная съ f^0:

(a)...	+	—	+
(α)...	0	—	+
(>α)...	—	—	+
(γ)...	—	0	+
(β)...	0	+	+
(b)...	+	+	+

или начиная съ f':

(α)...	+	—	+
		0	
(b)...	+	+	+

Легко убѣдиться, что это исчезаніе можетъ произойти только двумя слѣдующими порядками: или прежде всѣхъ начнетъ исчезать f''', или исчезаніе начнется съ f'; другія функціи немогутъ начать исчезаніе, иначе придемъ къ нелѣпости.

Когда прежде всѣхъ исчезнетъ f''', и потомъ f'':

	0.	I.	II.	III.	VI.	V.	VI.
(>c)......	+	+	—	—	+	—	+
(d).......	+	+	—	0	+	—	+
(>d).....	+	+	—	+	+	—	+
(e)........	+	+	0	+	+	—	+
(>e)......	+	+	+	+	+	—	+
(f).......	+	+	+	+	0	—	+
(>f)......	+	+	+	+	—	—	+
(h)........	+	+	+	+	—	0	+
(b)........	+	+	+	+	—	+	+

Въ первомъ случаѣ f^{0} будетъ имѣть два корня, f' одинъ, и своимъ исчезаніемъ не унесетъ ни одной перемѣны.

Когда исчезаніе начнется съ f':

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$(>c)$……	+	+	−	−	+	−	+
		0					
……	+	−	−	−	+	−	+
	0						
……	−	−	−	−	+	−	+
				0			
……	−	−	−	+	+	−	+
			0				
……	−	−	+	+	+	−	+
		0					
……	−	+	+	+	+	−	+
	0						
……	+	+	+	+	+	−	+
					0		
……	+	+	+	+	−	−	+
						0	
(b)…….	+	+	+	+	−	+	+

Напротивъ, если допустимъ, что прежде всѣхъ уничтожится V., то IV. будетъ имѣть съ нею одинаковый знакъ и никогда не уничтожится между $>c$ и b, тогда, какъ по строкѣ разностей она имѣетъ одинъ корень; и такъ это не годится.

Если бы ничтожилась прежде всѣхъ IV., то f' и f^{0} получили бы только по одному корню, а у нихъ должно быть по два; да кромѣ того и послѣдняя строка была бы не одинакова съ (b).

Функція II. не можетъ начать уничтоженія, потому что у нее одинаковый знакъ съ производною.

И такъ уничтоженіе можетъ начаться: или съ f''', или съ f'. Въ первомъ случаѣ f'' своимъ исчезаніемъ, при

Во второмъ случаѣ, когда исчезаніе начнется съ f', она уничтожась разъ, унесетъ обѣ перемѣны и f^0 не достанетъ двухъ корней.

Въ (B) исчезаніе можетъ произойти тоже двоякимъ образомъ:

начинаясь съ f^0:				начинаясь съ f':			
(a)····	—	+	—	(a)···	—	+	—
(α)····	0					0	
	+	+	—	(b)···	—	—	—
(γ)····		0					
	+	—	—				
(β) ···	0						
(b)····	—	—	—.				

Въ первомъ случаѣ опять всѣ корни будутъ вещественные.

Во второмъ, f^0 будетъ имѣть два мнимые, потому что f', которой смѣжныя съ одинаковымъ знакомъ, исчезаніемъ своимъ уноситъ двѣ перемѣны. Замѣтимъ, что въ обоихъ случаяхъ А и В, f'' не-

---

$x = e$, уноситъ двѣ перемѣны, оттого что смѣжныя къ ней, f''' и f' обѣ съ $+$; и поэтому ни f' ни f^0 не могутъ уничтожиться; у каждой *недостаетъ* по два корня.

Во второмъ случаѣ, корни всѣхъ функцій будутъ вещественные и строка разностей удовлетворится.

Однимъ словомъ, какія бы двѣ строки знаковъ (a) и (b) заданы ни были, во всякомъ случаѣ знаки развести можно только двоякимъ образомъ, т. е. или парные корни выдутъ мнимые, оттого что исчезаніе средней функціи унесетъ пару перемѣнъ, или всѣ корни будутъ вещественные, когда исчезаніе среднихъ функцій не унесетъ ни одной перемѣны.

имѣетъ ни одного корня, какъ показываетъ строка разностей

2 1 0.

Теперь можемъ вообще найти признаки: когда неявное исчезаніе среднихъ функцій уноситъ и когда не уноситъ ни одной перемѣны.

Всего проще это объясняется чертежемъ.

Пусть данная функція

$$y = f(x)$$

представляетъ ординаты кривой (черт. 1 и 2) *mpn*, когда перемѣнной x будемъ давать разныя величины по оси абциссъ oX. Предѣлы a и b суть абциссы oa и ob. Кривая *mpn* въ промежуткѣ ab неимѣетъ точки изгиба, потому что величина абциссы, отвѣчающая каждой точкѣ изгиба, именно дѣлаетъ

$$f''(x) = 0,$$

а въ обоихъ нашихъ примѣрахъ этого нѣтъ; сталобыть въ кривой *mpn* нѣтъ изгибовъ; и какъ величина $f''(x)$ (въ случаѣ A) положительная для обоихъ концевъ, то явно, что та кривая имѣетъ точно такой видъ какъ на чертежѣ: она повсюду выпукла, и выпуклость ея обращена къ оси абциссъ. Въ нѣкоторой точкѣ p этой дуги, касательная параллельна оси абциссъ. Тангенсъ угла ихъ наклоненія, выражаемый $f'(x)$, будетъ нуль, т. е. въ точкѣ p

$$f'(x) = 0.$$

Въ кривой *mpn* только одна такая точка и есть, гдѣ наклоненіе нуль; сталобыть $f'(x)$ имѣетъ только одинъ корень. Прибавимъ еще, что крайнія ординаты $f(a)$ и $f(b)$ обѣ положительныя, слѣдств. черт. 1 и 2, точно выражаютъ такую кривую.

Въ первой есть двѣ точки пересѣченія α и β; абциссы $o\alpha$ и $o\beta$ даютъ величины двухъ вещественныхъ корней. Во второй, которая не доходитъ до оси абциссъ, нѣтъ точекъ пересѣченія, недостаетъ обоихъ искомыхъ корней: они мнимые.

Теперь дѣло въ томъ, какъ узнавать, который изъ чертежей выражаетъ данную функцію между предѣлами a и b.

Вопросъ легко рѣшится, если знаемъ точную величину y абциссы oy, отвѣчающей точкѣ p, гдѣ касательная параллельна оси; стоитъ только поставить эту величину y въ въ $f(x)$ и смотрѣть на знакъ ея. Если знакъ $f(y)$ противенъ знаку $f(a)$ и $f(b)$, есть двѣ точки пересѣченія: корни вещественные, и оба отдѣлятся отъ постановленія величины $x = y$, или близкой къ ней.

Ежели знакъ $f(y)$ одинаковъ съ знакомъ $f(a)$ и $f(b)$, нѣтъ двухъ точекъ пересѣченія, корни мнимые.

Этоже самое условіе можно выразить еще такъ: въ чертежѣ 2, проведемъ изъ m и n двѣ касательныя до пересѣченія съ осью въ a' и b'; возставимъ ординаты $a'm'$, $b'n'$; изъ m' и n', опять касательныя; черезъ нѣсколько такихъ пріемовъ касательныя выйдутъ за свои предѣлы и разстояніе отъ ординаты до точки пересѣченія касательной, т. е. подкасательная, будетъ больше разности между предѣлами. Это, когда кривая не доходитъ до оси абциссъ.

Напротивъ, когда кривая имѣетъ двѣ точки пересѣченія между a и b, какъ въ черт. 1, этого никогда не будетъ: каждая изъ подкасательныхъ aa', $a'a''$ и проч. выдетъ меньше ab, $a'b'$ и проч. тоже и съ другаго конца, подкасательныя bb', $b'b''$ и проч меньше ba, $b'a'$ и проч.

Возмемъ въ этомъ же чертежѣ сумму двухъ подкасательныхъ aa' и bb', и необращая вниманія на ихъ знаки, т. е. *принявъ каждую съ* $+$, найдемъ, что ихъ сумма меньше разности между предѣлами

$$aa' + bb' < ab < b - a \cdots\cdots\cdots (2)$$

точно тоже и обо всѣхъ слѣдующихъ подкасательныхъ: сумма ихъ всегда меньше разности между ихъ предѣлами $a'b'$, $a''b''$ и проч.

Но извѣстно, что подкасательнаа

$$bb' = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$aa' = \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Необращая вниманія на ихъ знаки, возмемъ сумму, и по (2) получимъ

$$\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a \ldots (3).$$

Если это условіе не существуетъ, т. е. когда сумма подкасательныхъ равна или больше разности предѣловъ $b - a$, значитъ неявное исчезаніе начинаетъся съ f', и она уноситъ обѣ перемѣны.

Чертежъ 1 и 2 представляетъ случай A, т. е. когда $f(a)$ и $f(b)$ обѣ съ $+$.

Случай B, когда $f(a)$ и $f(b)$ обѣ съ —, выразится черт. 3 и 4, къ которымъ приложимъ точно тѣже разсужденія, и найдемъ тоже самое условіе (3).

Въ обоихъ случаяхъ, поставя вмѣсто a и b численныя величины, мы заключимъ, что оба корня f^o мнимые, если сумма подкасательныхъ больше или равна разности предѣловъ $(b-a)$. Если же она меньше, тогда надо взять промежуточную величину γ такую:
$$a < \gamma < b$$
и подставить въ $f(x)$; когда пара корней ея разобьется, дѣло кончено, корни отдѣлены; если же вся пара останется по ту или другую сторону γ, опять приложимъ правило подкасательныхъ (3), и продолжаемъ это до тѣхъ поръ: пока сумма подкасательныхъ между новыми сближенными предѣлами будетъ больше или равна разности между этими предѣлами, и тогда явно, что корни мнимые; или пока пара корней не разобьется, и оба они отдѣлятся.

Случиться можетъ, что сумма подкасательныхъ меньше разности предѣловъ, а корни при нѣсколькихъ подраздѣленіяхъ не разбиваются; это значитъ что въ кривой mpn, точки α, β и γ или очень близки между собою, или совмѣстились, сталобыть
$$a = b = \gamma,$$
т. е. $f^o(x)$ и $f'(x)$ имѣютъ общаго множителя $\varphi(x)$.

И такъ при первомъ удовлетвореніи условію (3), не подставляя промежуточной величины, напередъ надо посмотрѣть, нѣтъ ли въ $f(x)$ и $f'(x)$ общаго множителя $\varphi(x)$; и ежели найдется, то корень уравненія
$$\varphi(x) = 0,$$
будетъ искомый двойной корень $f(x)$.

Въ этой теоремѣ Фурье, намъ понадобилось разсматривать кривыя линіи; и знать выраженіе подкасательныхъ; но тоже условіе (3) для мнимыхъ корней можемъ вывести аналитическимъ образомъ.

Припомнимъ напередъ доказанное въ теоремахъ VI. и VII., гдѣ мы говорили о неявномъ исчезаніи среднихъ функцій: если начальная функція между предѣлами a и b имѣетъ два корня вещественные, то ея производная, между тѣми же предѣлами непремѣнно имѣетъ одинъ корень y, который больше малаго и меньше большаго изъ корней начальной функціи; и будемъ, какъ вначалѣ этой VIII. теоремы, разсматривать тѣ случаи, когда между предѣлами a и b строка разностей есть слѣдующая

$$2,\ 1,\ 0,$$

т. е. когда вторая производная не имѣетъ ни одного корня.

Пусть малый изъ корней $f(x)$ *)

$$\alpha = a + z,$$

т. е.
$$f(x) = f(a+z) = 0.$$

Но извѣстно, (лекц. I.) что

$$f(a+z) = f(a) + zf'(a+\theta z) = 0,$$

будетъ

$$z = \frac{-f(a)}{f'(a+\theta z)}$$

---

*) Здѣсь разсматриваемъ случай A, когда $f(a)$ и $f(b)$ обѣ положительныя

$$(a) \ldots\ldots + \quad - \quad +$$
$$(b) \ldots\ldots + \quad + \quad +.$$

Другой случай B точно также разсмотрится.

и корень

$$\alpha = a + \frac{-f(a)}{f'(a+\theta z)}.$$

$a + \theta z < (a + z = \alpha)$, слѣд. и подавно

$$a + \theta z < \gamma$$

и потому $f'(a+\theta z)$ нулемъ быть неможетъ *).

Мы видимъ что для величинъ x равныхъ и меньшихъ α, $f'(x)$ съ —, то α представится такъ

$$\alpha = a + \frac{f(a)}{f'(a+\theta z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ $\frac{-f(a)}{f'(a+\theta z)}$ величина положительная; да и во всякомъ случаѣ она положительная, потому, что если (B) $f'(a+\theta z)$ съ +, то $f(a)$ будетъ съ —. И такъ нѣтъ нужды обращать вниманіе на знаки $f(a)$ и $f'(a+\theta z)$, а только на численныя ихъ величины.

Но сей часъ напомнили, что численная величина $f'(x)$ отъ a до γ уменьшается, и при $x = \gamma$,

$$f'(\gamma) = 0,$$

слѣдств.

$$\frac{f(a)}{f'(a)} < \frac{f(a)}{f'(a+\theta z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Изъ (4) и (5) имѣемъ

$$a + \frac{f(a)}{f'(a)} < \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Положимъ теперь, что другой корень

---

*) Этого не могли бы сказать, если бы f'' между a и b имѣла одинъ корень.

$$\beta = b - z$$

z величина положительная; будетъ

$$f(b-z) = f(b) - zf'(b-\theta z) = 0,$$

откуда

$$z = \frac{f(b)}{f'(b-\theta z)}$$

и

$$\beta = b - \frac{f(b)}{f'(b-\theta z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

$b-\theta z < b$; численная величина $f'(x)$ отъ γ до b увеличивается, то

$$f'(b) > f'(b-\theta z),$$

и

$$\frac{f(b)}{f'(b-\theta z)} > \frac{f(b)}{f'(b)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Изъ (7) и (8) имѣемъ

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} > \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Сравнивъ (6) и (9), и замѣтя, что $\beta > \alpha$, найдемъ

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} > a + \frac{f(a)}{f'(a)}$$

откуда

$$\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Условіе тоже, что и (3).

Если сумма подкасательныхъ *больше* или *равна* разности предѣловъ, пара корней $f(x)$ мнимая, т. е. неявное исчезаніе средней функціи уноситъ двѣ перемѣны.

Если сумма подкасательныхъ *меньше* разности предѣловъ, надобно дальше подраздѣлять предѣлы, удостовѣрясь напередъ что въ $f(x)$ и $f'(x)$ нѣтъ общаго множителя, пока, или условіе (10) нарушится, или пара корней разобьется.

ЛЕКЦІЯ VII.

Отдѣленіе корней.

(Продолженіе.)

Теперь легко понять способъ Фурье, который состоитъ въ слѣдующемъ: беремъ всѣ производныя той функціи, которой корни хотимъ отдѣлить, пишемъ всѣ ихъ въ рядъ, подобный (1) (лекц. V.) подставляемъ въ него какія угодно числа, находимъ столько же строкъ знаковъ; между каждыми двумя изъ нихъ составимъ извѣстнымъ образомъ особыя *строки разностей* (лекц. V. — IV.), которыя сей часъ покажутъ, сколько корней f^{0} должно искать между каждыми двумя числами; наконецъ явное или неявное исчезаніе среднихъ функцій, дастъ число недостающихъ корней; всѣ остальные будутъ вещественные.

И такъ здѣсь должно разсмотрѣть два обстоятельства: собственно отдѣленіе корней, и признаки вещественныхъ и мнимыхъ корней.

A. *Собственно отдѣленіе корней.*

Если вмѣсто x поставимъ во весь рядъ функцій, $-\infty$, потомъ $+\infty$, то вопервыхъ, численная величина старшаго члена въ каждой функціи, выдетъ больше суммы остальныхъ ея членовъ (лекц. I.); во вторыхъ: отъ $x = -\infty$ всѣ функціи, которыхъ старшіе члены четныхъ степеней, будутъ съ $+$; всѣ функціи нечетныхъ степеней будутъ съ $-$, кромѣ f^n, которая всегда съ $+$; но отъ постановленія $x = +\infty$, и четныя и нечетныя, всѣ съ $+$. Написавши эти двѣ строки знаковъ, полагая что степень $f(x)$ четная *)

	0.	I.	II.	III.	IV.		$n-2$	$n-1$	n
$(-\infty)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	…	$+$	$-$	$+$
$(+\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	…	$+$	$+$	$+$

увидимъ, что въ первой строкѣ, $(-\infty)$, все перемѣны знаковъ; во второй строкѣ, $(+\infty)$, все постоянства.

Но въ строкахъ $(-\infty)$ и $(+\infty)$ столько знаковъ, сколько въ ряду (1) членовъ, т. е. $n+1$; число промежутковъ между ими $= n$, то во всякомъ ряду произв. функцій, постановленіе $x = -\infty$ даетъ n перемѣнъ знаковъ; постановленіе $x = +\infty$ даетъ n постоянствъ.

Всегда можно найти такія двѣ конечныя величины a и b, гдѣ $a < b$, что отъ постановленія $x = a$ во всѣ функціи ряда (1), получится точно такая же

*) *Если степень n, $f(x)$ нечетная, то верхняя строка знаковъ начнется съ $-$, но заключенія будутъ тѣже.*

строка (a) перемѣнъ, какъ и отъ $x = -\infty$; отъ постановленія $x = b$ получится строка (b) постоянствъ, такая же какъ отъ $x = +\infty$, т. е. можно найти такія двѣ величины a и b, что $x = a$ дастъ n перемѣнъ, $x = b$ дастъ n постоянствъ; и тогда отъ постановленія величинъ между $-\infty$ и a; всѣ новыя строки будутъ совершенно одинаковы съ строками $(-\infty)$ и (a); отъ постановленія какихъ угодно величинъ между b и $+\infty$, всѣ новыя строки будутъ такія какъ (b) и $(+\infty)$ *).

Всѣ корни $f(x)$ будутъ заключаться между a и b, тутъ должно ихъ искать.

---

*) Пояснимъ это примѣромъ:

Пусть дана: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$
ея производныя: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$
$f''(x) = 6x + 4$
$f'''(x) = 6$.

Поставя вмѣсто x: $-\infty$; -10; $+10$; $+\infty$ получимъ четыре строки знаковъ:

$(-\infty)$ . . . . . $-$ $+$ $-$ $+$ } тоже число
(-10) . . . . . $-$ $+$ $-$ $+$ } перемѣнъ.
$(+10)$ . . . . . $+$ $+$ $+$ $+$ } тоже число
$(+\infty)$ . . . . . $+$ $+$ $+$ $+$ } постоянствъ.

Отъ обоихъ постановленій: $-\infty$ и $+\infty$, -10 и $+10$, уносятся три перемѣны. Между -10 и $+10$ можемъ искать трехъ корней; ихъ нѣтъ ни между $-\infty$ и -10, ни между $+10$ и $+\infty$; но подставя -3 и $+1$, получимъ

(-3) . . . . $-$ $+$ $-$ $+$ } тѣже самыя
(1) . . . . $+$ $+$ $+$ $+$ } строки.

Вотъ предѣлы еще ближе: три корня оказываются между -3 и 1.

Отсюда прямо заключаемъ, что всякая промежуточная величина α', такая:

$$a < \alpha' < b$$

даетъ строку (α') или подобную (a), или такую какъ (b) (см. примѣръ), или наконецъ строка (α') будетъ не сходна ни съ той ни съ другою; тогда въ ней будетъ *меньше* перемѣнъ нежели въ (a) и *больше* чѣмъ въ (b).

Какъ велика разность между числомъ перемѣнъ въ строкахъ (a) и (α'), столько корней $f(x)$ надо искать между a и α'.

Сколько исчезнетъ перемѣнъ между строками (α') и (b) столько корней $f(x)$ надо искать между α' и b [лекц. V. — (IV.)].

Точно также скажемъ о новыхъ промежуточныхъ величинахъ α и α'' такихъ:

$$a < \alpha < \alpha' < \alpha'' < b.$$

Всегда можемъ выбрать

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''' \ldots .$$

постепенно возрастающія отъ a до b такія, что нѣсколько перемѣнъ уносится между строками (a) и (α), нѣсколько ихъ исчезаетъ между (α) и (α'), между (α') и (α'') и т. д. Легко доказать, что сколько бы промежуточныхъ величинъ между a и b мы ни поставили, перемѣнъ исчезнетъ столько, сколько въ уравненіи корней, т. е. n.

Положимъ что число перемѣнъ въ строкѣ

$$\begin{aligned}
(\alpha\ ),\ &= n^0,\ n^0 < n \\
(\alpha'\ ),\ &= n',\ n' < n^0 \\
(\alpha''),\ &= n'',\ n'' < n'
\end{aligned}$$

$$(\alpha^{i-1}),\ = n^{i-1},\ n^{i-1} < n^{i-2}$$

$$(\alpha^{i}),\ = n^{i},\ n^{i} < n^{i-1}$$

въ строкѣ (b), $= 0$:

мы доказали что подстановленіе

α, уноситъ число перемѣнъ $v_0 \;= n - n^0$
α', „ „ „ $v_1 \;= n^0 - n'$
α'', „ „ „ $v_2 \;= n' - n''$
....
α^i, „ „ „ $v_i \;= n^{i-1} - n^i$
b, „ „ „ $v_{i+1} = n^i - 0.$

Сложивши все это, найдемъ, что сумма всѣхъ перемѣнъ, унесенныхъ всѣми строками,

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots v_{i+1} = n.$$

И такъ видимъ, что собственно отдѣленіе корней по способу Фурье не составляетъ ни малѣйшей трудности: для этого нужно:

1) Найти крайніе предѣлы a и b такіе, чтобъ (a) давало n перемѣнъ, (b) давало n постоянствъ.

2) Подставлять вмѣсто x во весь рядъ производныхъ функцій промежуточныя величины α, α', α'', α'''.... такъ, чтобъ число n перемѣнъ разбилось на нѣсколько другихъ меньшихъ чиселъ v_0, v_1, $v_2 \ldots v_{i+1}$

3) Постановленіе $x = 0$ *отдѣлитъ* корни *положительные* отъ корней *отрицательныхъ:* разность въ числѣ перемѣнъ между строками $(-\infty)$ и (0), покажетъ предѣлъ числа отрицательныхъ корней; разность между числомъ перемѣнъ въ строкахъ (0) и $(+\infty)$ дастъ предѣлъ числа положительныхъ корней.

4) Съ каждымъ числомъ перемѣнъ, напр. v_0 между предѣлами a и α, поступать точно также, какъ сей часъ поступали съ числомъ n между a и b и т. д. пока числа v_0, $v_1 \cdots\cdots v_{i+1}$ разобьются на другія еще меньшія числа.

Если успѣемъ разбить всѣ числа на единицы, отдѣленіе корней кончено; мы *будемъ знать между какими предѣлами каждый корень заключается.*

Это не всегда возможно; за то всегда можемъ отдѣлить нѣсколько ихъ *попарно* между двумя числами; остальные по *одному.*

В. *Признаки вещественныхъ и мнимыхъ корней.*

1) Тѣ изъ величинъ α, α', α'' ... между которыми точно исчезаетъ начальная функція $f(x)$, будутъ предѣлами *вещественныхъ* корней.

Тѣ величины, между которыми явное или неявное исчезаніе среднихъ функціи уноситъ нѣсколько перемѣнъ, будутъ предѣлами корней *недостающихъ* въ $f(x)$, *мнимыхъ.*

2) Ежели между двумя числами α и α' исчезаетъ только *одна* перемѣна, то между ими есть вещественный корень, отъ котораго уничтожается именно крайняя $f(x)$; потому что исчезаніе среднихъ функцій всегда уноситъ, *парное* число перемѣнъ знаковъ. (Лекц. V. и VI., теор. V., VI. и VII.)

Вообще если между двумя числами уносится *нечетное* число перемѣнъ, то навѣрное между тѣми предѣлами есть хотя *одинъ* вещественный корень.

Всякое Алгебрическое уравненіе съ вещественными коэфиціентами *нечетной* степени, имѣетъ по меньшой мѣрѣ одинъ корень вещественный.

3) *Если между a и b найдется одно или нѣсколько* разныхъ чиселъ такихъ, что отъ постановленія ихъ въ рядъ (1) послѣдуетъ *явное* уничтоженіе одной или нѣсколькихъ среднихъ функцій, мы сей часъ сосчитаемъ (лекц. V. теор. V.) сколько паръ унесутъ они перемѣнъ знаковъ; пусть это число паръ будетъ ϱ, заключимъ, что начальная функція $f(x)$ имѣетъ непремѣнно 2ϱ корней мнимыхъ; а можетъ имѣть ихъ еще больше, отъ *неявнаго* уничтоженія среднихъ функцій.

Вообще при явномъ уничтоженіи среднихъ функцій всѣ пары мнимыхъ корней оказываются между предѣлами $a - \omega$ и $a + \omega$, *безконечно близкими* (V.).

4) Что касается до неявнаго уничтоженія среднихъ функцій, то написавъ извѣстнымъ образомъ (лекц. V. теор. IV.) строку разностей, пойдемъ въ ней отъ лѣвой руки къ правой до первой единицы, впереди которой 2, позади 0 *) такимъ образомъ

$$\cdots\cdots 2,\ 1,\ 0\cdots\cdots$$

---

*) Если же послѣ первой 1 слѣдуетъ не нуль, а другая единица, или нѣсколько ихъ, значитъ предѣлы не довольно еще сближены, чтобъ можно было приложить способъ подкасательныхъ.

Примѣръ этого видѣли стран. 95 въ примѣч. 1 къ таблицѣ (3). Тамъ, между предѣлами a и b'' строка разностей вышла

$$3\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0,$$

къ которой нельзя еще приложить способъ подкасательи по способу подкасательныхъ, подставимъ въ формулу (10) (лекц. VI. — теор. VIII.) численныя величины функцій, отвѣчающихъ цыфрамъ 2 и 1; если сумма подкасательныхъ больше разности между предѣлами $\alpha' - \alpha$, значитъ два корня указанные цыфрою 2, мнимые; поэтому и во всѣхъ функціяхъ, до f^0 включительно, теорем. VII., будетъ по два корня мнимыхъ. Потомъ цыфру 2 вычтемъ изъ всей строки разностей; съ новой строкою поступимъ точно также и т. д.

Но если по формулѣ (10) выдетъ сумма подкасательныхъ меньше разности предѣловъ, тогда, удостовѣрясь напередъ что въ среднихъ функціяхъ, отвѣчающихъ цыфрамъ 2 и 1, нѣтъ общаго множителя *), надобно *подраздѣлить* предѣлы, т. е. между

ныхъ; но когда вставили промежуточное число b', получили новую строку разностей

$$2\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$$

въ которой, идучи отъ лѣвой руки къ правой до первой 1, находимъ уже послѣ нее 0. Тутъ правило подкасательныхъ имѣетъ мѣсто.

*) Но когда общій множитель у нихъ есть, положимъ $\varphi(x)$, и въ тоже время строка разностей идетъ въ прогрессіи натуральныхъ чиселъ до самой f^0, наприм. такъ:

0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII. . . .
6	5	4	3	2	1	0	0

то можетъ случиться, что f^0 имѣетъ шесть корней равныхъ, и именно когда $\varphi(x)$ есть общій множитель всѣхъ функцій отъ V. до нулевой; или когда корень

$$\varphi(x) = 0,$$

α и α' вставить среднюю величину α'', такую:

$$\alpha < \alpha'' < \alpha'.$$

Если строка (α'') будетъ одинакова съ которою либо изъ прежнихъ строкъ, положимъ съ (α'), тогда искомыя пары корней окажутся между двумя, еще болѣе сближенными предѣлами α и α''. Опять приложимъ правило подкасательныхъ; если и теперь сумма подкасательныхъ меньше разности новыхъ предѣловъ, то еще подраздѣлимъ предѣлы, вставя между ими α''', такую:

$$\alpha < \alpha''' < \alpha'' \text{ и т. д.}$$

Можетъ, и очень часто, случиться, что по которую

обращаетъ всѣ тѣ функціи въ нуль. (Лекц. V. — теор V. — *c*.) И такъ способъ Фурье, не только не требуетъ предварительнаго отдѣленія равныхъ корней, но еще облегчаетъ работу, какъ въ этомъ примѣрѣ: нѣтъ нужды искать общаго множителя f^0 и f', высокихъ степеней; мы найдемъ его, когда онъ есть, между f^{IV} и f^{V}, гораздо низшихъ степеней.

Но если функціи IV. и V. имѣютъ общаго множителя $\varphi(x)$, а строка разностей идетъ не въ прогрессіи чиселъ, наприм. такъ:

0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI....
5	4	3	2	2	1	0....

тогда функціи IV. и V. исчезаніемъ своимъ при величинѣ x, удовлетворяющей

$$\varphi(x) = 0,$$

непремѣнно унесутъ нѣсколько перемѣнъ, (лекц. V. — теорем. V., *a* и *b*) и судя по знакамъ у смѣжныхъ къ нимъ, найдемъ сколько, и заключимъ, что въ f^0, между тѣми предѣлами, такое число недостаетъ корней.

нибудь сторону α''' исчезнетъ нечетное число перемѣнъ, значитъ, пара корней разобьется, и отдѣлится *одинъ* вещественный корень по одну сторону, *другой* по другую сторону α'''.

Если же напротивъ, строка (α''') будетъ одинакова наприм. съ (α''), то пара корней останется между α и α''', предѣлами еще болѣе тѣсными.

Въ большей части случаевъ, послѣ нѣсколькихъ подраздѣленій, корни или окажутся мнимыми или разобьются; однако случается, два корня такъ между собою близки, что несмотря на утомительное подраздѣленіе не разбиваются. Способъ отдѣленія такихъ близкихъ корней покажемъ послѣ.

Все это пояснимъ теперь примѣрами:

Пусть

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 3x - 2$$

производныя:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 16x - 3$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 16$$
$$f'''(x) = 24x - 12$$
$$f^{\text{IV}}(x) = 24$$

$(-\infty)\cdots\cdots + \; - \; + \; - \; +$
$(-1)\cdots\cdots + \; - \; + \; - \; +$
$(0)\cdots\cdots - \; - \; + \; - \; +$
$(1)\cdots\cdots + \; + \; + \; + \; +$
$(+\infty)\cdots\cdots + \; + \; + \; + \; +.$

Между -1 и $-\infty$ нѣтъ корней, потому что въ строкахъ ихъ тѣже самые знаки.

Между 1 и $+\infty$ тоже нѣтъ корней.

Слѣдств. всѣ корни заключаются между -1 и $+1$.

Въ строкѣ (— 1) четыре перемѣны знаковъ; въ строкѣ (0) только три, одна унесена; между 0 и — 1 есть одинъ отрицательный веществен. корень, (В. 2). Далѣе, въ строкѣ (0) три перемѣны, въ строкѣ (1) ни одной; всѣ три исчезли; между 0 и 1 три корня; одинъ изъ нихъ навѣрное вещественный; подставимъ $x=\frac{1}{2}$, и перепишемъ строки (0) и (1), будетъ

	0.	I.	II.	III.	IV.
(0)	—	—	+	—	+
$(<\frac{1}{2})$	—	+	+	—	+
$(\frac{1}{2})$	—	+	+	0	+
$(>\frac{1}{2})$	—	+	+	+	+
(1)	+	+	+	+	+

Въ строкѣ $(\frac{1}{2})$, $f'''(\frac{1}{2})$, обращается въ нуль; до ея исчезанія въ строкѣ $(<\frac{1}{2})$ три перемѣны; въ строкѣ (0) тоже три: значитъ, между 0 и $\frac{1}{2}$ нѣтъ корней.

Въ строкѣ $(<\frac{1}{2})$ три перемѣны; въ строкѣ $(>\frac{1}{2})$ одна перемѣна; унесено ихъ двѣ; поэтому пара корней оказывается между предѣлами $<\frac{1}{2}$ и $>\frac{1}{2}$, безконечно близкими; оба мнимые. (В. 3.)

Въ строкѣ $(>\frac{1}{2})$ одна перемѣна; въ (1) ни одной, одинъ вещественный корень положительный заключается между $\frac{1}{2}$ и 1.

И такъ наше уравненіе имѣетъ два корня мнимые и два вещественные: одинъ положительный, другой отрицательный.

Пусть

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 8x - 4\\
f'(x) &= 4x^3 + 12x^2 - 24x + 8\\
f''(x) &= 12x^2 + 24x - 24\\
f'''(x) &= 24x + 24\\
f^{IV}(x) &= 24.
\end{aligned}$$

	0.	I.	II.	III.	IV.
(— 10)……	+	—	+	—	+
(— 1)……	—	+	—	0	+
(0)……	—	+	—	+	+
(< 1)……	—	—	+	+	+
(1)……	—	0	+	+	+
(> 1)……	—	+	+	+	+
(10)……	+	+	+	+	+

Въ строкѣ (— 10) четыре перемѣны; въ строкѣ (0) три перемѣны: между 0 и — 10 одинъ вещественный отрицательный корень. Между 0 и 10 три корня: изъ нихъ одинъ непремѣнно вещественный; про остальные два ничего не знаемъ. Составимъ строку разностей

	0.	I.	II.	III.	IV.
(0)……	—	+	—	+	+
	3	2	1	0	0
(> 1)……	—	+	+	+	+
	1	0	0	0	0
	2	2	1	0	0

Правило подкасательныхъ имѣетъ мѣсто; (В. 4), здѣсь $a = 0$; $b = 1$;

$$\frac{f'(a)}{f''(a)} = \frac{8}{24}; \quad \frac{f'(b)}{f''(b)} = \frac{0}{12};$$

и какъ
$$\frac{8}{24} < 1 - 0,$$

то надо подраздѣлить предѣлы, и будетъ

0……	—	+	—	+	+
($\frac{1}{2}$)……	—	—	—	+	+
	1	1	1	0	0
	2	1	0	0	0

Здѣсь $a = 0$; $b = \frac{1}{2}$;

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Одна изъ подкасательныхъ равна разности предѣловъ $\frac{1}{2} - 0$.

Сталобыть оба корня мнимые.

5) Если въ уравненіи не достаетъ нѣсколько членовъ сряду, то смотря по знакамъ смѣжныхъ съ ними членовъ, число мнимыхъ корней опредѣлится [теор. V. (лек. V.)] точно также, какъ опредѣляли ихъ по числу уничтожающихся сряду среднихъ функцій, съ тѣмъ же условіемъ здѣсь, какъ и тамъ, что кромѣ этихъ мнимыхъ корней, могутъ быть и другіе, происходящіе отъ неявнаго уничтоженія среднихъ функцій.

Возмемъ частный примѣръ

$$f(x) = x^5 + 2x^3 - x + 3;$$

можно написать такъ:

$$f(x) = x^5 + 0 \cdot x^4 + 2x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 3.$$

Здѣсь члены смѣжные къ недостающему x^4, оба съ тѣмъ же знакомъ $+$; а смѣжные къ x^3, съ разными знаками.

Напишемъ всѣ функціи

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + 2x^3 - x + 2 \\ f'(x) &= 5x^4 + 6x^2 - 1 \\ f''(x) &= 20x^3 + 12x \\ f'''(x) &= 60x^2 + 12 \\ f^{\text{IV}}(x) &= 120x \\ f^{\text{V}}(x) &= 120. \end{aligned}$$

Подставя $x = 0$, получимъ

$$\begin{array}{lcccccc} & 0. & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V.} \\ (0) \cdots\cdots & + & - & 0 & + & 0 & + \end{array}$$

При $x=0$ уничтожаются двѣ партіи функцій, въ каждой партіи по одной функціи. Посмотримъ сколько каждая изъ нихъ уноситъ перемѣнъ.

Смѣжныя съ $f^{\text{iv}}(0)=0$, обѣ съ $+$ (какъ и члены нашего уравненія x^5 и $2x^3$, оба съ $+$), сталобыть она уноситъ перемѣнъ единицею больше (теор. V. *b*), т. е. $1+1$ двѣ. Поэтому $f(x)$ имѣетъ два корня мнимые.

Напротивъ $f''(x)$ хотя тоже исчезаетъ, но смѣжныя съ ней, одна съ $+$, другая съ $-$, (какъ и члены нашего уравненія, $+2x^3$ и $-x$, смѣжные съ $0\cdot x^2$) то ея исчезаніе уноситъ перемѣнъ единицею меньше, т. е.

$$1-1=0,$$

ничего не уноситъ.

Чтобъ отдѣлить вещественные корни, когда они есть, пишемъ слѣдующія строки:

$(-1)\cdots$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	один корень веществ. отрицательный.
$(<0)\cdots$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	
							два корня мнимые.
$(>0)\cdots$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$(1)\cdots$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	два корня.

и видимъ, что между 0 и -1 исчезаетъ одна перемѣна, есть одинъ корень вещественный отрицательный. Между 0 и 1 два корня, но не знаемъ какіе; пишемъ строку разностей

$(>0)\cdots$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	2	1	0	0	0	0
$(1)\cdots$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	2	1	0$\cdots\cdots\cdots$			

правило подкасательныхъ имѣетъ мѣсто;

$$a=0;\ b=1;\ \frac{f(a)}{f'(a)}=\tfrac{3}{1};$$

оба корня мнимые.

Возмемъ еще примѣръ.

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 1$$
$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3$$
$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 48x$$
$$f^{IV}(x) = 120x - 48$$
$$f^{V}(x) = 120$$

Вставя $x = 0$, получимъ

$$(0) \cdots\cdots - \; 0 \; 0 \; 0 \; - \; +.$$

Здѣсь уничтожаются три функціи сряду; въ $f(x)$ столько же сряду недостаетъ членовъ

$$0 \cdot x^3, \;\; 0 \cdot x^2, \;\; 0 \cdot x;$$

въ строкѣ (0) смѣжныя функціи, $f(x)$ и $f^{IV}(x)$, обѣ съ —; въ уравненіи члены смѣжные къ недостающимъ оба съ —. Это и всегда такъ.

По теор. V. b', (лекц. V.) эти три функціи, исчезающія сряду, уносятъ единицею больше своего числа

$$3 + 1 = 4,$$

или двѣ пары перемѣнъ.

Заключаемъ, что предложенная функція имѣетъ четыре корня мнимые и одинъ вещественный, который легко отдѣлимъ въ слѣдующихъ строкахъ:

	f^0	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
$(>0)\cdots\cdots$	—	—	—	—	—	+
$(1)\cdots\cdots$	—	—	—	+	+	+
$(2)\cdots\cdots$	—	+	+	+	+	+
$(3)\cdots\cdots$	+	+	+	+	+	+.

Здѣсь прежде нежели исчезла f^0, исчезли всѣ младшія функціи, начиная отъ f^{IV}. Этоже видѣли лекц. V., теорем. IV. Корень между 2 и 3.

И вообще въ уравненіи двучленномъ

$$x^m + a_m = 0;$$

или $$x^m + a_1 \ x^{m-1} + a_m = 0$$

въ которомъ недостаетъ нѣсколькихъ членовъ сряду: помощію теоремы V. лекц. V. легко сосчитаемъ число недостающихъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ, написавъ рядъ производныхъ для перваго:

$$f^0 = x^m + a_m$$
$$f' = mx^{m-1}$$
$$f'' = m(m-1)x^{m-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{m-1} = m(m-1)(\cdots)[m-(m-2)]x$$
$$f^m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot m.$$

Видимъ, что отъ постановленія $x = 0$, всѣ среднія функціи обратятся въ нуль, и дадутъ слѣдующія строки, когда *m четное* и членъ a_m *положительный:*

	0.	I.	II.	$m-3$,	$m-2$,	$m-1$,	m.
(<0)	$+$	$-$	$+ \cdots\cdots -$	$+$	$-$	$+$	
(0)	$+a_m$	0	$0 \cdots\cdots 0$	0	0	$+$	
(>0)	$+$	$+$	$+ \cdots\cdots +$	$+$	$+$	$+$	

Въ строкѣ (<0) все перемѣны, въ (>0) все постоянства знаковъ, *всѣ* корни *мнимые.*

Когда *m четное* и a_m *отрицательное,* въ двучленномъ уравненіи окажется $m-2$ корня между предѣлами <0 и >0 безконечно близкими. И только два будетъ вещественныхъ: одинъ между $-\infty$ и 0, другой между 0 и $+\infty$. При m нечетномъ всегда будетъ одинъ корень вещественный, а прочіе все мнимыя.

Что касается до уравненій вида

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_m = 0$$

въ которыхъ недостаетъ многихъ членовъ сряду, то посредствомъ той же теоремы легко сосчитаемъ число недостающихъ корней. Именно:

Когда между двумя уцѣлѣвшими, недостаетъ $2n+1$ членовъ, то число мнимыхъ корней отъ одной этой причины будетъ: или $2n$, когда смѣжныя съ исчезнувшими имѣютъ разные знаки, или $2n+2$, когда у смѣжныхъ одинаковые знаки. Когда же недостаетъ $2n$ членовъ, то въ обоихъ случаяхъ число мнимыхъ корней будетъ $2n$.

ЛЕКЦІЯ VIII.

Отдѣленіе корней.

(Продолженіе.)

Чтобы выказать еще больше простоту способа Фурье, возмемъ уравненіе высокой степени, наприм. 12-й, которое разомъ могло бы объяснить разные случаи, доселѣ встрѣчавшіеся и требующіе различныхъ пріемовъ.

Пусть будетъ уравненіе:

0.) $x^{12} - 9x^{11} + 25x^{10} - 17x^9 - x^8 - 47x^7 + 33x^6 + 29x^5 + 19x^4 - 19x^3 - 19x^2 + 3x + 2.$

Возмемъ ея производныя:

I.) $12x^{11} - 99x^{10} + 250x^9 - 153x^8 - 8x^7 - 329x^6 + 198x^5 + 145x^4 + 76x^3 - 57x^2 - 38x + 3$

II.) $132x^{10} - 990x^9 - 2250x^8 - 1224x^7 - 56x^6 - 1974x^5 + 990x^4 + 580x^3 + 228x^2 - 114x - 38$

III.) $1320x^9 - 8910x^8 + 18000x^7 - 8568x^6 - 336x^5 - 9870x^4 + 3960x^3 + 1740x^2 + 456x - 114$

IV.) $11880x^8 - 71280x^7 + 126000x^6 - 51408x^5 - 1680x^4$
$- 39480x^3 + 11880x^2 + 3480x + 456.$

V.) $95040x^7 - 498960x^6 + 756000x^5 - 257040x^4$
$- 6720x^3 - 118440x^2 + 23760x + 3480.$

VI.) $665280x^6 - 2993760x^5 + 3780000x^4 - 1028160x^3$
$- 20160x^2 - 236880x + 23760.$

VII.) $3991680x^5 - 14968800x^4 + 15120000x^3 - 3084480x^2$
$- 40320x - 236880.$

VIII.) $19958400x^4 - 59875200x^3 + 45360000x^2 - 6168960x$
$- 40320.$

IX.) $79833600x^3 - 179625600x^2 + 90720000x - 6168960.$

X.) $239500800x^2 - 359251200x + 90720000.$

XI.) $479001600x - 359251200.$

XII.) $479001600.$

Всѣ отдѣленія корней показаны въ приложенной таблицѣ.

1. Отдѣленіе.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
$(-\infty)$	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
(-1)	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(5)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$(+\infty)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Отдѣленіе шести корней между — 1 и 0.

2.

(-1)	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(0)	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
разности:	6	5	5	4	4	3	2	2	1	0			

3.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
(— 1)...........	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(— 0.5).	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
разности:	1	0											

4.

(— 0.5).........	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(0).............	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
разности:	5	5	5	4	4	3	2	2	1	0			

5.

(— 0.5).........	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(— 0.3).........	+	+	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	10	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
разности:	1	1	1	0									

6.

(— 0.3).........	+	+	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	10	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(0).............	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
разности:	4	4	4	4	4	3	2	2	1	0			

7.

(— 0.3).........	+	+	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	10	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(— 0.1).........	+	+	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	10	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	0	0	0										

8.

(— 0.1).........	+	+	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	10	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(0).............	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
разности:	4	4	4	4	4	3	2	2	1	0			

Отдѣленіе шести корней между 0 и 5.

9.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
(0)............	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
(5)............	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
разности:	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0

10.

(0)..........	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
(3)..........	+	+	—	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	2	2	1	1	0								
разности:	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	2	1	0

11.

(3)	+	+	—	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	2	2	1	1	0								
(5).........	+	+	+	+	+								
разности:	2	2	1	1	0								

12.

(3)..........	+	+	—	—	+	.	.	.	.	.	.	.	.
	2	2	1	1	0								
(4)..........	+	+	+	+	+								
разности:	2	2	1	1	0								

13.

(3)..........	+	+	—	—	+	.	.	.	.	.	.	.	.
	2	2	1	1	0								
(3.5)........	—	—	—	—	+	.	.	.	.	.	.	.	.
	1	1	1	1	0								
разности:	1	1	0	0	0								

14.

(3.5)........	—	—	—	—	+	.	.	.	.	.	.	.	.
	1	1	1	1	0								
(4)..........	+	+	+	+	+	.	.	.	.	.	.	.	.
разности:	1	1	1	1	0								

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
							15.						
(2).	—	—	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+	+
	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	0	0
(3).	+	+	—	—	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	2	2	1	1	0								
разности:	1	1	2	2	3								
							16.						
(0).	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
(2).	—	—	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+	+
	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	0	0
разности:	3	3	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	
							17.						
(0).	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
(<1)	—	+	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+	+
	5	4	3	3	3	3	2	2	1	1	1	0	0
(1).	0	0	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+	+
(>1)	—	—	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+	+
разности:	1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	0.

1) Подставимъ вмѣсто x, $-\infty$ и $+\infty$; въ 1-мъ отдѣленіи видимъ, что отъ $-\infty$ получили все перемѣны знаковъ; отъ $+\infty$, все постоянства. Точно тоже и отъ -1 и 5. Строка разностей показываетъ, что f^0 имѣетъ право на 12 корней, 1-я производная, право на 11 корней и т. д.

Теперь надо отдѣлить *положительные* корни отъ *отрицательныхъ*. Поставимъ во всѣ функціи, $x=0$. Отдѣленіе 2 показываетъ, что отъ постановленія нуля, функціи принимаютъ другія знаки, и другое число перемѣнъ. Вычтя число перемѣнъ въ строкѣ

(0) изъ числа перемѣнъ (— 1), находимъ, что XII., XI., X. и IX. производныя функціи не имѣютъ права ни на одинъ корень между предѣлами — 1 и 0. Но что VIII. имѣетъ право ни одинъ корень, VII. и VI. на два, V-я на три, IV. и III. на четыре, II. и I. на пять, f^o имѣетъ право на шесть корней между — 1 и 0. Всѣ ли они вещественные? это узнаемъ послѣ; а теперь говоримъ утвердительно, что въ уравненіи оказывается шесть корней между — 1 и 0; а другіе шесть между 0 и 5. (См. отд. 9.)

3) Займемся отдѣленіемъ корней, оказавшихся между — 1 и 0.

Поставя $x = -0.5$, получаемъ въ строкѣ разностей 3 отдѣленія, что всѣ функціи отъ XII. до I. включительно, отказались отъ всякаго права между предѣлами — 1 и — 0.5; только $f^o(x)$ удержала право на одинъ корень, которымъ и пользуется, потому, что видѣли (лекц. VI. — B. I.): если разность въ числѣ перемѣнъ между двумя предѣлами будетъ нечетная (B. — I.), то уравненіе непремѣнно имѣетъ тамъ одинъ корень вещественный.

4) Удостовѣрясь, что одинъ отрицательный корень заключается между — 1 и — 0.5, мы теперь знаемъ, что остальные пять содержатся между — 0.5 и 0. Отдѣленіе 4. показываетъ: что f^o дѣйствительно, между этими предѣлами удерживаетъ право на пять корней; и какъ это число нечетное, то заключаемъ что тамъ есть непремѣнно еще одинъ вещественный; объ остальныхъ пока ничего не можемъ сказать.

5) Надо еще подраздѣлить предѣлы, для этого между — 0.5 и 0 поставимъ $x = -0.3$. Отдѣленіе 5.

показываетъ, что тотъ вещественный корень, о существованіи котораго мы сей часъ удостовѣрились, заключается между — 0.5 и — 0.3. И такъ вотъ мы уже отдѣлили два отрицательные корня: одинъ между — 1 и — 0.5 (отд. 3.), другой между — 0.5 и — 0.3. Это показываетъ намъ отдѣленіе 5. Мы могли бы дальше подраздѣлить предѣлы, и вставить — 0.2, и проч., но способъ подкасательныхъ сей часъ покажетъ, что изъ числа остальныхъ четырехъ корней, два непремѣнно мнимые.

6) Въ самой вещи, въ 6. отдѣленіи пойдемъ въ строкѣ разностей отъ лѣвой руки до первой единицы; въ нашемъ примѣрѣ находимъ первую единицу противъ VIII. функціи; впереди ее 2, позади 0.

$$2. \quad 1 \quad 0;$$

правило подкасательныхъ имѣетъ мѣсто.

Здѣсь $a = -0.3$, $b = 0$.

Подставя $x = -0.3$ и $x = 0$, въ функціи VII. и VIII. находимъ, что одна дробь

$$\frac{f^{\mathrm{vii}}(0)}{f^{\mathrm{viii}}(0)} = \frac{236880}{40320} = 5.8\ldots > (b - a);$$

Сталобыть дѣйствительно, между предѣлами: — 0.3 и 0, двѣ перемѣны знаковъ унесены уничтоженіемъ VII. функціи, и въ числѣ четырехъ остальныхъ корней $f^0(x)$, она имѣетъ два мнимые.

7) Не подраздѣляя далѣе отрицательныхъ предѣловъ, чтобъ отдѣлить остальные два корня, можемъ употребить извѣстный пріемъ. Вычтемъ (отдѣленіе 6) изъ строки разностей цыфру 2, слѣдующимъ образомъ:

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
(—0.3) ⋯	+	+	—	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+
	10	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
(0) ⋯⋯	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	—	+
	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	2	1	0
разн.:	4	4	4	4	4	3	2	2	1	0	0	0	0
мнимые корни:													
	2	2	2	2	2	2	2	2					
право на корни:													
	2	2	2	2	2	1	0	0	1	0.			

Чтобъ узнать, веществ. или мнимые эти остальные два корня, на которые $f^0(x)$ имѣетъ право, можемъ поступить такъ, какъ поступили въ членѣ 6, т. е, идя въ послѣдней строкѣ отъ лѣвой руки къ правой, остановимся на первой единицѣ, противъ функціи V., возлѣ нее функція IV. имѣетъ 2; остановясь говорю на цыфрахъ

$$2,\ 1,\ 0;$$

употребимъ правило подкасательныхъ; и какъ здѣсь $a = -0.3$, $b = 0$, то подставляя въ функціи IV. и V. вмѣсто x, -0.3 и 0, получимъ

$$\frac{f^{\text{IV}}(-0.3)}{f^{\text{V}}(-0.3)} = \frac{1767}{16429} = 0.09$$

$$\frac{f^{\text{IV}}(0)}{f^{\text{V}}(0)} = \frac{456}{3480} = 0.13.$$

Разность предѣловъ $b - a = 0.3$, больше суммы подкасательныхъ, $0.09 + 0.13 = 0.22$; нужно дальше подраздѣлять предѣлы.

По настоящему надлежало бы сперва узнать, нѣтъ ли въ f^{IV} и f^{V} общаго множителя, но это очень продолжительно, и тѣмъ болѣе не нужно, что слѣдующее подраздѣленіе предѣловъ рѣшитъ дѣло гораздо скорѣе. При этомъ замѣтимъ, что еще въ отдѣленіи 2. мы могли бы узнать, что въ числѣ 5 корней f^o, два корня ея мнимые, именно, дойдя въ строкѣ разностей до первой единицы, которая стоитъ подъ VIII. функціей, мы точно также приложили бы правило подкасательныхъ, (какъ въ 6) и узнали бы, что два корня мнимые, вычли бы эти два корня изъ всей строки „разностей," и получа новый рядъ цыфръ, въ которомъ первую единицу встрѣтили бы подъ V. функціею, и, какъ сей часъ сдѣлали, увидѣли бы, что правило подкасательныхъ ничего еще не показываетъ.

8) И такъ надо между -0.3 и 0 еще подраздѣлить предѣлы. Вставя $x = -0.1$ во всѣ функціи, получимъ въ 7 отдѣленіи, что между -0.3 и -0.1 нѣтъ ни какихъ корней, потому что оба даютъ тѣже знаки, и тоже число перемѣнъ. И такъ надо ихъ искать между -0.1 и 0. Въ отдѣленіи 8 получаемъ туже строку „разностей," какъ и въ отдѣленіи 6, и зная уже (чл. 6), что функція VII. имѣетъ въ томъ числѣ два корня мнимые, вычтемъ цыфру 2 во всей строкѣ, получимъ слѣдующую строку:

функціи:	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	....
право на корни:	2	2	2	2	2	1	0	.....

Такую же строку мы вывели изъ 6 отдѣленія (чл. 7); но тамъ правило подкасательныхъ удовлетворялось, и требовало дальнѣйшаго подраздѣленія; здѣсь напротивъ, подставляя въ функціи IV. и V. вмѣсто x, -0.1 и 0, получимъ для формулы

$$b - a > \frac{f^{\text{IV}}(a)}{f^{\text{V}}(a)} + \frac{f^{\text{IV}}(b)}{f^{\text{V}}(b)},$$

$$\frac{f^{\text{IV}}(a)}{f^{\text{V}}(a)} = \frac{456}{3480} = 0.09,\ \frac{f^{\text{IV}}(-0.1)}{f^{\text{V}}(-0.1)} = \frac{266}{107} = 2.4$$

И какъ $0.09 + 2.4 = 2.49 > 0 - (-0.1) > 0.1$,

а должно быть меньше, сталобыть и эта пара корней мнимые.

И такъ мы теперь совершенно отдѣлили всѣ шесть корней между -1 и 0, изъ нихъ два вещественные: одинъ между -1 и -0.5, другой между -0.5 и -0.3; четыре мнимые оказались: два между -0.3 и -0.1, два между -0.1 и 0.

9) Займемся теперь отдѣленіемъ шести корней, оказавшихся между 0 и 5. Въ самой вещи, сведя знаки, произшедшіе отъ постановленія $x = 0$ и $x = 5$, въ 9 отдѣленіи видимъ, что f^0 имѣетъ право на шесть корней. Потомъ идя отъ лѣвой руки въ строкѣ „разностей" до первой единицы, которая принадлежитъ функціи XI., и найдя у смѣжной ей функціи X. цыфру 2, приложимъ правило подкасательныхъ: здѣсь оно удовлетворяется:

$$5 - 0 > \frac{f^{\text{X}}(0)}{f^{\text{XI}}(0)} + \frac{f^{\text{X}}(5)}{f^{\text{XI}}(5)};$$

не знаемъ какіе корни; общаго множителя f^{X} и f^{XI} не имѣютъ. Подраздѣляемъ предѣлы, и ставимъ во всѣ функціи $x = 3$. Въ отдѣленіи 10 между 0 и 3 оказались четыре корня, провѣривъ опять по правилу подкасательныхъ, не обнаружимъ еще, чтобъ въ числѣ ихъ были мнимые. Въ тоже время видимъ, что остальные два корня заключены между 3 и 5. Сведя въ отдѣленіи 11 знаки отъ обоихъ предѣловъ, находимъ, что f^{0} и f' имѣютъ право на два корня, f'' и f''' на одинъ корень. Правило подкасательныхъ не имѣетъ мѣста, потому, что строка разностей

2 2 1 1 0.

Надобно еще, между 3 и 5 подраздѣлить предѣлы, ставимъ $x = 4$, и въ отдѣленіи 12 находимъ, въ строкѣ (4) тѣже знаки что и въ (5); сталобыть между 4 и 5 нечего искать корней; оба они между 3 и 4.

Подставя $x = 3.5$, въ отдѣлен. 13 и 14, оба корня f^{0} разбились: одинъ между 3 и 3.5, другой между 3.5 и 4.

10) Въ отдѣленіи 10 между 0 и 3 оказались четыре корня, но не знаемъ какіе. Подставимъ $x = 2$, и въ отдѣленіи 15 одинъ изъ нихъ отдѣляется, потому что f^{0} между 2 и 3 получаетъ право на одинъ корень, котораго, по нечетности его указателя, ни что не можетъ отнять; въ тоже время видимъ (отд. 16), что остальные три заключаются между 0 и 2, и покрайней мѣрѣ одинъ изъ числа ихъ вещественный. Здѣсь правило подкасательныхъ не имѣетъ мѣста, потому что идучи съ лѣвой руки, послѣ первой единицы встрѣчаемъ I. Надобно дальше подраздѣлить предѣлы.

11) Подставя $x = 1$, въ отдѣленіи 17 находимъ, что f^{0} и f' разомъ уничтожаются, это значитъ, обѣ они имѣютъ общаго множителя (лекц. V. теор. V. *c.*) $(x - 1)$, и въ f^{0} два корня равные I. Еслибъ $f^{0}(x)$ имѣла три корня $= 1$, тогда уничтожились бы три функціи сряду

$$f^0(x),\ f'(x) \text{ и } f''(x),$$

потому что въ f^0 былъ бы множитель $(x-1)^3$, въ $f'(x)$ былъ бы множитель $(x-1)^2$, въ $f''(x)$ общій съ ними множитель $(x-1)$.

Послѣдній корень, какъ видно по разности числа перемѣнъ въ строкахъ (0) и (<1), заключается между 0 и I.

Мы теперь отдѣлили всѣ 12 корней предложеннаго уравненія, и нашли, что *четыре* изъ нихъ мнимые; *два* вещественные отрицательные: одинъ между -1 и -0.5, другой между -0.5 и -0.3; *шесть* корней положительныхъ, все вещественные: одинъ между 0 и 1, два равныхъ 1, четвертый между 2 и 3, пятый между 3 и 3.5, наконецъ шестой между 3.5 и 4.

Посмотримъ еще, какъ способъ Фурье отдѣляетъ равные корни.

Пусть

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x - 1\\
f'(x) &= 6x^5 + 15x^4 - 15x^2 + 3\\
f''(x) &= 30x^4 + 60x^3 - 30x\\
f'''(x) &= 120x^3 + 180x^2 - 30\\
f^{\text{IV}}(x) &= 360x^2 + 360x\\
f^{\text{V}}(x) &= 720x + 360\\
f^{\text{VI}}(x) &= 720.
\end{aligned}$$

Поставя вмѣсто x разныя численныя величины, имѣемъ

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(-2)	+	—	+	—	+	—	+
(-1)	—	+	+	—	—	+	+
(0)	—	+	0	—	0	+	+

(>0)	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
	3	2	1	1	0	0	0
(1)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
разности:	3	2	1	1	0	0	0

Между 0 и 1 оказываются три корня, и между — 1 и — 2 тоже три корня. Отдѣлимъ сперва положительные.

Принимая f' за начальную, видимъ, что ея вторая производная (т. е. f''') имѣетъ одинъ корень; надо еще сблизить предѣлы. Поставимъ $\frac{1}{2}$, будетъ

$(\frac{1}{2})$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
(1)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
разности:	3	2	1	0	0	0	0

Здѣсь функція f''' не имѣетъ уже корня, послѣ первой единицы слѣдуетъ нуль: можно приложить правило подкасательныхъ; поставимъ $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, въ формулу 10 (лекц. VI.) получимъ

$$\frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} + \frac{f'(1)}{f''(1)} = \frac{\frac{12}{32}}{\frac{90}{16}} + \frac{9}{60} = \frac{12.16}{90.32} + \frac{9}{60} = \frac{1}{15} + \frac{3}{20} < 1 - \frac{1}{2}.$$

Не видно чтобъ корни были мнимые; надо еще подраздѣлить предѣлы.

Но напередъ посмотримъ, не имѣютъ ли f' и f'' общаго дѣлителя.

Сокративши первую на 3, а вторую на $30x$, получаемъ

$$2x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 1$$

и

$$x^3 + 2x^2 - 1.$$

По извѣстному способу находимъ, что дѣйствительно у нихъ есть общій множитель

$$x^2 + x - 1;$$

онъ же дѣлитель и $f(x)$, сталобыть $f(x)$ имѣетъ между $\frac{1}{2}$ и 1 три равные корня. Сдѣлавъ

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

получаемъ $\quad x_1 = 0{\cdot}61803\cdots\cdots$

$$x_2 = -1{\cdot}61803\cdots$$

И такъ предложенная функція имѣетъ всѣ шесть корней вещественные: три равные x_1 положительные, и три равные x_2 отрицательные.

Вообще, сколько $f(x)$ имѣетъ кратныхъ корней, столько можемъ получить различныхъ строкъ разн. между двумя, особыми для каждой, предѣлами. Всѣ такія строки будутъ въ прогрессія натуральныхъ чиселъ. По указанію каждой строки найдемъ общаго множителя между двумя функціями, отвѣчающимя цыфрамъ

2 и 1,

и отдѣлимъ всѣ корни двойные, тройные и т. д. гораздо легче, нежели по обыкновенному способу.

Пустъ еще

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012\\
f'(x) &= 6x^5 - 60x^4 + 240x^3 + 246x + 4567\\
f''(x) &= 30x^4 - 240x^3 + 720x^2 + 246\\
f'''(x) &= 120x^3 - 720x^2 + 1440x\\
f^{IV}(x) &= 360x^2 - 1440x + 1440\\
f^{V}(x) &= 720x - 1440\\
f^{VI}(x) &= 720.
\end{aligned}$$

Поставя $\quad -10,\ -1,\ 0,\ 1,\ 10$

получимъ

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(—10)···	+	—	+	—	+	—	+
(—1)····	—	—	+	—	+	—	+
(0)······	—	+	+	0	+	—	+

$$
\begin{array}{llllllll}
(1) \cdots\cdots & - & + & + & + & + & - & + \\
 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
(10) \cdots\cdots & + & + & + & + & + & + & +.
\end{array}
$$

Всѣ корни оказываются между -10 и $+10$; f''' своимъ исчезаніемъ уноситъ двѣ перемѣны, (смѣжныя съ ней обѣ съ $+$), въ $f(x)$ недостаетъ двухъ корней.

Въ строкѣ (-10) шесть перемѣнъ, въ (-1) пять перемѣнъ: одинъ корень между -1 и -10;

Между 1 и 10 оказываются три корня; одинъ непремѣнно вещественный. Для остальныхъ двухъ приложимъ правило подкасательныхъ, которое здѣсь имѣетъ мѣсто, потому что строка разностей, принимая f^{IV} за начальную, оканчивается цыфрами

2 1 0.

Имѣя $a = 1$, $b = 10$; $b - a = 9$, подставимъ въ формулу 10 (лекц. VI. — VIII.), получимъ

$$\frac{f^{\text{IV}}(1)}{f^{\text{V}}(1)} + \frac{f^{\text{IV}}(10)}{f^{\text{V}}(10)} = \frac{360}{720} + \frac{25040}{5760} < 9;$$

не видно чтобъ корни были мнимые; но прежде нежели станемъ сближать предѣлы, разыщемъ, нѣтъ ли общаго множителя въ f^{IV} и f^{V}, т. е.

$$360x^2 - 1440x + 1440 \text{ и } 720x - 1440;$$

и дѣйствительно у нихъ есть общій множитель

$$\tfrac{1}{2}x - 1,$$

откуда $$x = 2;$$

уничтоженіе f^{IV} и f^{V} сдѣлалось явнымъ.

Но какъ эта величина $x = 2$ не уничтожаетъ остальныхъ функцій *), кромѣ f^{IV} и f^{V}; смѣжныя съ ними f''' и f^{VI} обѣ съ $+$, сталобыть (лекц. V. — теор. VI.) уничтоженіемъ своимъ онѣ уносятъ двѣ перемѣны: искомые два корня $f(x)$ мнимые. Вычтя цыфру 2 изъ всей строки

$$3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0,$$

получимъ $$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0.$$

И такъ всѣ шесть корней отдѣлены: двухъ недостаетъ между предѣлами безконечно близкими <0 и >0; двухъ недостаетъ между предѣлами 2 и 10; пятый положительный между 2 и 10; шестой отрицательный между -1 и -10.

Въ заключеніе разсмотримъ одно изъ тѣхъ уравненій, въ которыхъ, не смотря на продолжительное сближеніе предѣловъ, два корня, между ими заключенные, не разбиваются и не оказываются мнимыми.

Пусть

$$f^{\circ} = 10500x^4 + 205x^3 - 204x^2 - 2x + 1 \cdots\cdots (\alpha).$$

возмемъ:
$$\begin{aligned} f' &= 42000x^3 + 615x^2 - 408x - 2 \\ f'' &= 126000x^2 + 1230x - 408 \\ f''' &= 252000x + 1230 \\ f^{\text{IV}} &= 252000. \end{aligned}$$

Поставя 0 и 1, находимъ

	0.	I.	II.	III.	IV.
(0)........	+	—	—	+	+
(1)........	+	+	+	+	+
	2	1	1	0.	

*) Это могло быть только тогда, когда бы строка разностей шла отъ 0 въ прогрессіи натуральныхъ чиселъ

$$6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0,$$

а здѣсь эта прогрессія обрывается на f'''.

Правило подкасательныхъ не имѣетъ мѣста; дѣлаемъ $x = \frac{1}{100}$ и $\frac{1}{10}$

$$\left(\tfrac{1}{100}\right)\cdots\cdots + \; - \; - \; + \; +$$
$$\left(\tfrac{1}{10}\right)\cdots\cdots + \; + \; + \; + \; +$$

тѣже самыя строки. Поставимъ еще $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{11}$:

$$\left(\tfrac{1}{50}\right)\cdots\cdots + \; - \; - \; + \; +$$
$$\left(\tfrac{1}{25}\right)\cdots\cdots + \; - \; - \; + \; +$$
$$\left(\tfrac{1}{11}\right)\cdots\cdots + \; - \; + \; + \; +$$
$$2 \quad 1 \quad 0$$
$$\left(\tfrac{1}{10}\right)\cdots\cdots + \; + \; + \; + \; +$$
$$\overline{\quad 2 \quad 1 \quad 0. \quad}$$

Предѣлы сблизились отъ $\frac{1}{11}$ до $\frac{1}{10}$, но корни не разбились; только получили строку разностей

$$2 \quad 1 \quad 0,$$

допускающую правило подкасательныхъ; здѣсь сумма ихъ меньше разности предѣловъ; надлежалобы еще подраздѣлить предѣлы, но это безполезно: не успѣемъ ни разбить корни, ни узнать какіе они, или ежели успѣемъ, то не скоро.

Чтобъ въ подобныхъ уравненіяхъ избѣжать подстановленія мелкихъ дробей, стоитъ только въ $f(x)$ вмѣсто x поставить $\frac{1}{x}$ и получимъ

$$\frac{10500}{x^4} + \frac{205}{x^3} - \frac{204}{x^2} - \frac{2}{x} + 1$$

$$= \frac{1}{x^4}(x^4 - 2x^3 - 204x^2 + 205x + 10500)$$

корни уравненія:

$$x^4 - 2x^3 - 204x^2 + 205x + 10500 \cdots (\beta)$$

представятъ знаменателей корней уравненія (α). Въ уравненіи (β) найдемъ, что между 10 и 11 оказываются два корня, но чрезъ простое подстановленіе, и правило подкасательныхъ долго не узнаемъ какіе.

Чтобъ узнать, нужно-ли такое утомительное сближеніе предѣловъ, (можетъ быть корни мнимые), Фурье, для подобныхъ случаевъ предложилъ слѣдующій пріемъ:

Прежде всего замѣтимъ, что могутъ быть два случая, въ которыхъ правило подкасательныхъ, нѣкоторымъ образомъ недостаточно для обличенія мнимости корней, т. е. когда получится строка разностей $\quad 2 \quad 1 \quad 0$

и послѣ нѣсколькихъ подраздѣленій сумма подкасательныхъ все меньше разности предѣловъ, а между тѣмъ корни не разбиваются. Тѣ два случая суть слѣдующіе:

$$1)\quad \begin{array}{l} (a)\cdots\cdots - \;+\; - \cdots\cdots \\ (b)\cdots\cdots - \;-\; - \cdots\cdots \end{array}$$

разности: $2 \quad 1 \quad 0$

$$2)\quad \begin{array}{l} (a)\cdots\cdots + \;-\; + \cdots\cdots \\ (b)\cdots\cdots + \;+\; + \cdots\cdots \end{array}$$

разности: $2 \quad 1 \quad 0.$

f' имѣетъ одинъ корень между предѣлами a и b, еслибы мы знали этотъ корень, положимъ α, который дѣлаетъ $\qquad f^{o}(\alpha) = 0,$
и подставя α вмѣсто x въ f^{o}, получили бы

$$f^{o}(\alpha) = +,$$

то ясно, что въ *первомъ* случаѣ оба корня $f(x)$ вещественные и оба отдѣлятся по ту и другую сторону α; во *второмъ* случаѣ нѣтъ двухъ корней $f(x)$: оба мнимые. (Лекц. V. — теор. I. и II.)

И на оборотъ, если отъ постановленія α, получится

$$f^0(\alpha) = -;$$

то въ *первомъ*, оба корня $f(x)$ мнимые; во *второмъ*, оба вещественные.

Рѣдко случится найти точный корень $f'(x)$; мы знаемъ только предѣлы его, болѣе или менѣе тѣсные, съ которыми, какъ видѣли, прежніе способы ничего не опредѣляютъ.

Вмѣсто того чтобы разсматривать двѣ функціи $f(x)$ и $f'(x)$, возмемъ слѣдующія двѣ:

$$\varphi(x) = f(x) + f'(x) \text{ и } f'(x).$$

Знаемъ, что корень α, обращающій $f'(x)$ въ нуль, заключается между a' и b'; по нимъ требуется опредѣлить съ точностію знакъ $f(\alpha)$. Но изъ

$$\varphi(x) = f(x) + f'(x)$$

видимъ, что искомый знакъ $f(\alpha)$ есть одинъ и тотже что и $\varphi(\alpha)$, потому, что $f'(\alpha) = 0$, по положенію. Но знакъ $\varphi(\alpha)$ легко найти: подставимъ предѣлы a' и b', корня α функціи $f'(x)$, во весь рядъ производныхъ отъ $\varphi(x)$, получимъ

$$(a') \cdots\cdots \varphi(a'),\ \varphi'(a'),\ \varphi''(a') \cdots\cdots \varphi'''(a')$$
$$(b') \cdots\cdots \varphi(b'),\ \varphi'(b'),\ \varphi''(b') \cdots\cdots \varphi'''(b').$$

Составимъ строку разностей, и если въ ней цыфра, отвѣчающая φ^0, будетъ нуль, значитъ φ^0 имѣетъ тотъ же знакъ для всѣхъ величинъ x между a' и b', т. е. общій знакъ $\varphi^0(a')$ и $\varphi^0(b')$ будетъ вмѣстѣ знакъ $\varphi(\alpha)$ и слѣдственно знакъ $f(\alpha)$, что и найти хотѣли.

Если этотъ знакъ будетъ $+$, то въ *первомъ* случаѣ, оба корни вещественные и отдѣлятся, во *второмъ,* оба мнимые.

Если этотъ знакъ будетъ $-$, то въ *первомъ* случаѣ оба корни мнимые; во *второмъ* вещественные.

Для поясненія возмемъ тотъ же самый примѣръ:

$$
\begin{aligned}
f^0 &= x^4 - 2x^3 - 204x^2 + 205x + 10500\\
f' &= 4x^3 - 6x^2 - 408x + 205\\
f'' &= 12x^2 - 12x - 408\\
f''' &= 24x - 12\\
f^{\text{IV}} &= 24.
\end{aligned}
$$

Отъ постановленіи 10 и 11, получимъ

$$
\begin{array}{lccccc}
 & 0. & \text{I}. & \text{II}. & \text{III}. & \text{IV}.\\
(10)\cdots\cdots & + & - & + & + & +\\
 & 2 & 1 & 0 & & \\
(11)\cdots\cdots & + & + & + & + & +\\
\hline
 & 2 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Потомъ

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{150}{475}$$

$$\frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{50}{315}$$

но $$\frac{f(a)}{f'(a)} + \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a = 1.$$

Сумма подкасательныхъ меньше разности предѣловъ; общаго множителя между f^0 и f' нѣтъ; слѣдовало бы дальше подраздѣлить предѣлы; но это будетъ безполезно.

И такъ здѣсь необходимъ послѣдній пріемъ; составимъ $$\varphi(x) = f(x) + f'(x),$$
и будетъ

$$\begin{aligned}
\varphi^0 &= \ \ x^4 + \ 2x^3 - 210x^2 - 203x + 10705 \\
\varphi' &= \ 4x^3 + \ 6x^2 - 420x - 203 \\
\varphi'' &= 12x^2 + 12x \ - 420 \\
\varphi''' &= 24x \ + 12 \\
\varphi^{\text{IV}} &= 24.
\end{aligned}$$

Поставя во весь рядъ тѣже предѣлы, 10 и 11, получимъ

$$\begin{array}{lccccc}
 & \varphi^0 & \varphi' & \varphi'' & \varphi''' & \varphi^{\text{IV}} \\
(10)' \cdots & - & + & + & + & + \\
 & 1 & 0 & & & \\
(11)' \cdots & + & + & + & + & + \\
\hline
 & 1 & 0. & & &
\end{array}$$

Строка разностей показываетъ одинъ корень $\varphi(x)$ между 10 и 11; надо сблизить предѣлы, чтобъ небыло ни одного. Подставя 10.4 и 10.75, какъ въ рядъ производныхъ отъ $f(x)$, такъ и въ производныя отъ $\varphi(x)$, получимъ

$$\begin{array}{lccccc}
 & f^0 & f' & f'' & f''' & f^{\text{IV}} \\
(10) \cdots\cdots & + & - & + & + & + \\
(10.4) \cdots\cdots & + & - & + & + & + \\
 & 2 & 1 & 0 & & \\
(10.75)' \cdots & + & + & + & + & + \\
(11) \cdots\cdots & + & + & + & + & + \\
 & \varphi^0 & \varphi' & \varphi'' & \varphi''' & \varphi^{\text{IV}} \\
(10.4)' \cdots & - & + & + & + & + \\
(10.75) \cdots & - & + & + & + & + \\
\hline
 & 0 & 0. & & &
\end{array}$$

Теперь нѣтъ ни одного корня $\varphi(x)$ между 10.4 и 10.75; $\varphi(10.4) = -$, $\varphi(10.75) = -$; заключаемъ, что $(\varphi)\alpha$ отъ постановленія α, корня $f'(x)$, даетъ

$$\varphi(\alpha) = -,$$

поэтому и $f(\alpha) = -;$

но $f(10.4) = +$

$$f(10.75) = +,$$

заключаемъ, что искомые корни вещественные, одинъ по одну, другой по другую сторону корня α. Теперь можемъ смѣло подраздѣлять предѣлы: знаемъ на вѣрное, что трудъ нашъ не пропадетъ даромъ, и хотя не скоро, но наконецъ успѣемъ разбить корни.

Мы не оканчиваемъ здѣсь этого примѣра, потому что намѣрены разбить искомые корни въ слѣдующей лекціи, гдѣ увидимъ, что способъ непрерывныхъ дробей, гораздо проще и скорѣе, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ, кромѣ случая равныхъ корней, сразу отдѣляетъ пары мнимыхъ корней, или разбиваетъ ихъ, когда они вещественные, и тутъ же *вычисляетъ* приближенную ихъ величину.

ЛЕКЦІЯ IX.

Отдѣленіе и вычисленіе корней.

Можно съ успѣхомъ приложить непрерывныя дроби къ отдѣленію корней.

Пусть $f(x)$ та функція, которой хотимъ отдѣлить корни; напишемъ рядъ

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)\cdots\cdots\cdots(1)$$

и будемъ подставлять вмѣсто x,

$$0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\ldots\ldots$$

до тѣхъ поръ, пока всѣ функціи примутъ знакъ $+$. По извѣстнымъ признакамъ увидимъ, сколько между каждыми двумя числами должно искать корней: нѣкоторые изъ нихъ могутъ быть совершенно отдѣлены: именно, когда останутся по одному между двумя смѣжными числами. Но если окажется нѣсколько ихъ между смѣжными числами

$$a \text{ и } a+1,$$

тогда поступимъ слѣдующимъ образомъ:

Дѣлаемъ

$$x = a + \frac{1}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Очевидно, что для всѣхъ вещественныхъ величинъ x, заключающихся между

$$a \text{ и } a + 1$$

$y > 1$; остается узнать, имѣетъ ли $f\left(a + \frac{1}{y}\right)$ корни больше 1.

Но какъ

$$f\left(a + \frac{1}{y}\right) = \left[f(a)y^n + f'(a)y^{n-1} + \frac{f''(a)}{1.2}y^{n-2} \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{f^n}{1.2\ldots n}\right]\frac{1}{y^n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

то ясно, что корни $f\left(a + \frac{1}{y}\right)$ будутъ тѣже, что и функціи

$$f(a)y^n + f'(a)y^{n-1} + \frac{f''(a)}{1.2}y^{n-2} + \ldots + \frac{f^n}{1.2\ldots n},$$

которую для краткости назовемъ $F(y)$.

Чтобы узнать, имѣетъ ли $F(y)$ положительные корни больше 1, напишемъ рядъ

$$F(y),\ F'(y),\ F''(y),\ F'''(y) \cdots F^n(y).$$

Поставимъ вмѣсто y числа

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots$$

Ежели корни

$$y_1\ y_2\ y_3 \cdots\cdots > 1$$

отдѣлятся, то поставя ихъ одинъ послѣ другаго во (2), отдѣлимъ и корни $f(x)$:

$$x_1 = a + \frac{1}{y_1}$$

$$x_2 = a + \frac{1}{y_2} \text{ и т. д.}$$

Но когда всѣ или нѣкоторые корни $F(y)$ окажутся мнимые, или вещественные, но меньше ли равные 1, то это вѣрный знакъ, что корни $f(x)$ имъ соотвѣтствующія мнимые.

Ежели случится, что корни $F(y)$ не отдѣляются. а это будетъ, когда нѣсколько ихъ надобно искать между двумя смѣжными числами

$$b \text{ и } b+1,$$

или по нѣскольку между разными парами смѣжныхъ чиселъ, тогда съ y поступимъ такъ, какъ поступали съ x, т. е. для корней между

$$b \text{ и } b+1$$

положимъ

$$y = b + \frac{1}{z},$$

получимъ новую функцію

$$F\left(b+\frac{1}{z}\right) = \left[F(b)z^n + F'(b)z^{n-1} + \frac{F''(b)}{1.2}z^{n-2} + \ldots \frac{F^n(b)}{1.2..n}\right]\frac{1}{z^n}$$

и для краткости назовемъ

$$\varphi(z) = F(b)z^n + F'(b)z^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{F^n(b)}{1.2\ldots n}.$$

Поступимъ съ нею какъ поступали съ $F(y)$; корни $\varphi(z)$ отдѣлятся или нѣтъ: ежели отдѣлятся, то отдѣлятся всѣ y и потомъ всѣ x; ежели нѣтъ, то надобно поступать съ z какъ съ x и y и т. д. Во всякомъ случаѣ положительные корни непремѣнно отдѣлятся, или окажется что всѣ, или нѣкоторые изъ нихъ, мнимые.

Для отдѣленія отрицательныхъ корней, перемѣнимъ x на $-x$, и будемъ искать положительныхъ корней

$$f(-x).$$

Впрочемъ можно находить отрицательные корни точно такимъ же образомъ, какъ находили положительные: стоитъ только подставлять

$$-1 \quad -2 \quad -3 \ldots\ldots$$

до тѣхъ поръ, пока получимъ все перемѣны знаковъ и т. д.

Пояснимъ это примѣрами:

Пусть

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^6 - 5x^3 + x - 10 \\
f' &= 6x^5 - 15x^2 + 1 \\
f'' &= 30x^4 - 30x \\
f''' &= 120x^3 - 30 \\
f^{\text{IV}} &= 360x^2 \\
f^{\text{V}} &= 720x \\
f^{\text{VI}} &= 720.
\end{aligned}$$

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(<0)	—	+	+	—	+	—	+
(0)	—	+	0	—	0	0	+
(>0)	—	+	—	—	+	+	+
(<1)	—	—	—	+	+	+	+
(1)	—	—	0	+	+	+	+
(>1)	—	—	+	+	+	+	+

Одинъ корень вещественный между 0 и $-\infty$.

Между <0 и >0 два корня мнимые.

Между 1 и $+\infty$ одинъ корень вещественный.

Незнаемъ только о двухъ корняхъ между 0 и 1.

Въ этомъ случаѣ $a = 0$ и

$$x = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y};$$

вставя въ $f(x)$, получимъ

$$F(y) = 10y^6 - y^5 + 5y^3 - 1$$
$$F'(y) = 60y^5 - 5y^4 + 15y^2.$$

Не продолжая брать слѣдующихъ производныхъ, видимъ, что коэфиціенты старшихъ членовъ каждой функціи такъ велики, что корень $F(y)$ не можетъ быть больше 1, потому что при $y = 1$ получимъ все постоянства знаковъ; а какъ для вещественности x, необходимо чтобъ y былъ больше единицы, то сей часъ заключаемъ, что пара корней, оказавшихся между 0 и 1, мнимые.

И вообще, когда въ $f(x)$ теорема Фурье обнаружитъ нѣсколько корней между

$$a \text{ и } a + 1$$

и отъ постановленія

$$x = a + \frac{1}{y}$$

получимъ $F(y)$ такую, что у нее нѣтъ ни одного корня $y > 1$,

то это вѣрный знакъ что корни мнимые.

Точно тоже скажемъ и о всѣхъ другихъ партіяхъ корней, если только $f(x)$ имѣетъ ихъ, заключенныхъ между

$$a_1 \text{ и } a_1 + 1$$
$$a_2 \text{ и } a_2 + 1 \text{ и т. д.}$$

именно, что когда ихъ преобразованныя уравненія неимѣютъ корней больше 1, значитъ, всѣ они мнимые.

И такъ вмѣсто того, чтобъ по правилу подкасательныхъ дѣлать два подстановленія, и, если не окажется признака мнимыхъ корней, снова подраздѣлять предѣлы, мы здѣсь сразу видимъ, когда корни мнимые.

Пусть еще

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$$

Напишемъ весь рядъ функцій

$$\begin{aligned}
f' &= 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46 \\
f'' &= 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190 \\
f''' &= 60x^2 - 72x - 144 \\
f^{\mathrm{IV}} &= 120x - 72 \\
f^{\mathrm{V}} &= 120.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
(-10) \cdots\cdots - \; + \; - \; + \; - \; + \\
(-1) \cdots\cdots + \; + \; - \; + \; - \; + \\
(0) \cdots\cdots - \; - \; + \; - \; - \; + \\
(1) \cdots\cdots - \; + \; + \; - \; + \; + \\
(2) \cdots\cdots - \; + \; - \; - \; + \; + \\
(3) \cdots\cdots - \; - \; - \; + \; + \; + \\
(10) \cdots\cdots + \; + \; + \; + \; + \; +
\end{array}$$

три корня вещественныхъ: одинъ положительный между 3 и 10; два отрицательныхъ: одинъ между -1 и -10, другой между 0 и -1; и два мнимыхъ между 2 и 3, потому что $y < 1$.

Для повѣрки возмемъ сумму подкасательныхъ

$$\tfrac{21}{30} + \tfrac{32}{40} = 1 \cdot 5;$$

она больше разности между предѣлами $3 - 2 = 1$: оба корня точно мнимые.

Въ лекціи III. объясняя примѣромъ отдѣленіе равнихъ корней, мы разбили тамъ $f(x)$ 13 степени на три множителя;

$$(x^3 + x - 1)(x^3 - x^2 - 3x + 2)^2 (x - 1)^4$$

отдѣлимъ корни этихъ множителей, здѣлавъ

$$x^3 + x - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0 \cdots\cdots\cdots (5).$$

Сперва займемся (4):

$$f(x) = x^3 + x - 1$$
$$f' = 3x^2 + 1$$
$$f'' = 6x$$
$$f''' = 6$$

и

$$\begin{array}{lcccc} (<0)\cdots\cdots & - & + & - & + \\ (0)\cdots\cdots & - & + & 0 & + \\ (>0)\cdots\cdots & - & + & + & + \\ (1)\cdots\cdots & + & + & + & + \end{array}$$

Два корня оказываются между <0 и >0, сталобыть мнимые; это мы могли предвидѣть и потому, что не достаетъ члена x^2, и смѣжные оба съ одинаковымъ знакомъ. (Лекц. VIII. B. — 5.)

Третій корень положительный между 0 и 1; отыщемъ его по непрерывнымъ дробямъ.

Здѣлавъ

$$x = \frac{1}{y}$$

подставимъ въ (4) и получимъ

$$y^3 - y^2 - 1 = 0 \cdots\cdots (6),$$

$$\begin{array}{ll} & F(y) \\ (1)\cdots\cdots & - \\ (2)\cdots\cdots & + \end{array}$$ *).

И такъ y заключается между 1 и 2; сдѣлаемъ

$$y = 1 + \frac{1}{z}$$

---

*) Когда между двумя предѣлами ищемъ только одного корня, то нѣтъ надобности брать всѣ производныя отъ f^0; только въ нее и будемъ подставлять 1 и прочіе числа, пока не получимъ перемѣны знака.

Подставимъ въ (6), и будетъ

$$z^3 - z^2 - 2z - 1 = \varphi(z).$$

$$\begin{array}{ll} & \varphi(z) \\ (2)\ldots\ldots\ldots & - \\ (3)\ldots\ldots\ldots & + \end{array}$$

z заключается между 2 и 3; положимъ

$$z = 2 + \frac{1}{u}$$

и продолжая далѣе, получимъ

$$\psi(u) = u^3 - 3u - 1;$$

$$\begin{array}{ll} & \psi(u) \\ (2)\ldots\ldots\ldots & - \\ (3)\ldots\ldots\ldots & + \end{array}$$

u, тоже между 2 и 3.

Сдѣлавъ

$$u = 2 + \frac{1}{t},$$

найдемъ

$$\Phi(t) = 3t^3 - 7t^2 - 6t - 1;$$

$$\begin{array}{ll} & \Phi(t) \\ (3)\ldots\ldots & - \\ (4)\ldots\ldots & + \end{array}$$

Остановясь на этомъ, знаемъ, что корень $f(x)$ заключается между

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{5}{7} = 0.71$$

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}} = \frac{17}{24} = 0.70.$$

Общій десятичный знакъ обоихъ предѣловъ

$$0.7$$

будетъ принадлежать истинной величинѣ корня, такъ что за приближенную величину искомаго корня можемъ взять $x = 0.7\ldots$

Впослѣдствіи покажемъ, что этотъ корень разнится отъ истиннаго менѣе

$$\frac{1}{(24)^2} = \frac{1}{576}.$$

Ниже будетъ приложенъ способъ, находить дальнѣйшіе дѣсятичные знаки очень скоро, если уже имѣемъ, какъ сей часъ, первый знакъ.

Займемся теперь отдѣленіемъ корней уравн. (5)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 3x + 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2x - 3 \\ f''(x) &= 6x - 2 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

	0.	I.	II.	III.
(— 1)	—	+	—	+
(0)	+	—	—	+
(1)	—	—	+	+
(2)	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	+	+	+

Здѣсь одинъ корень отрицательный между 0 и — 1; два положительныхъ: одинъ равенъ 2, другой между 0 и 1. Мы бы могли легко найти приближенную величину остальныхъ двухъ; но еще легче выразить истинную ихъ величину посредствомъ радикала; раздѣля $f(x)$ на ея множителя $x - 2$, получимъ новое уравненіе

$$x^2 + x - 1,$$

котораго корни

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

И такъ уравненіе 13 степени, приведенное въ III. лекціи для отдѣленіи равныхъ корней, состоитъ изъ слѣдующихъ множителей:

$$f(x) = (x - a - bi)(x - a + bi)(x - 0.7\ldots)(x - 2)^2$$
$$\left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 (x - 1)^4.$$

Для поясненія этого способа возмемъ еще нѣсколько примѣровъ. Пусть

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^2 + 10x + 7 \\ f'(x) &= 4x^3 - 10x + 10 \\ f''(x) &= 12x^2 - 10 \\ f'''(x) &= 24x \\ f^{\text{IV}}(x) &= 24. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lccccc} (1)\cdots\cdots & - & + & + & - & + \\ & & & & - & \\ (0)\cdots\cdots & + & + & - & 0 & + \\ & & & & + & \\ (1)\cdots\cdots & + & + & + & + & +. \end{array}$$

И такъ между 0 и 1 оказываются два корня; постановивъ

$$x = 0 + \frac{1}{y}$$

получимъ

$$F(y) = 7y^4 + 10y^3 - 5y^2 + 1.$$

Но здѣсь $y < 1$, пара корней между 0 и 1, мнимые.

Остальные два корня отрицательные: одинъ между 0 и —1, другой между —1 и —∞; мы не станемъ разыскивать ихъ приближенной величины.

Возмемъ еще уравненіе, въ которомъ между a и $a+1$ оказывается по парѣ корней вещественныхъ.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x + 2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 12x + 9 \\ f''(x) &= 12x^2 - 36x + 12 \\ f'''(x) &= 24x - 36 \\ f^{\text{IV}}(x) &= 24. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} (0) \cdots\cdots + \; + \; + \; - \; + \\ (3) \cdots\cdots + \; - \; + \; + \; + \\ (4) \cdots\cdots + \; + \; + \; + \; +. \end{array}$$

Здѣсь два корня <0, и два положительные, оба между 3 и 4. Сдѣлавъ

$$x = 3 + \frac{1}{y}$$

и вставя въ $f(x)$, получимъ

$$\begin{aligned} F(y) &= 2y^4 - 9y^3 + 6y^2 + 6y + 1 \\ F' &= 8y^3 - 27y^2 + 12y + 6 \\ F'' &= 24y^2 - 54y + 12 \\ F''' &= 48y - 54 \\ F^{\text{IV}} &= 48. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} (1) \cdots\cdots + \; - \; - \; - \; + \\ \qquad\qquad\qquad\quad - \\ (2) \cdots\cdots - \; - \; 0 \; + \; + \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \\ (3) \cdots\cdots - \; + \; + \; + \; + \\ (4) \cdots\cdots + \; + \; + \; + \; +. \end{array}$$

y, имѣетъ двѣ положительные величины, сталобыть

x имѣетъ два корня между 3 и 4, вещественные Разыщемъ ихъ.

Одна величина y заключается между 1 и 2, другая между 3 и 4; займемся первою.

I. Пусть

$$y = 1 + \frac{1}{z}.$$

Вставимъ въ $F(y)$, получимъ

$$\varphi(z) = 6z^4 - z^3 - 9z^2 - z + 2$$

$$\begin{array}{ll} & \varphi(z) \\ (1) \cdots\cdots & - \\ (2) \cdots\cdots & + \end{array}$$

Величина z заключается между 1 и 2; дѣлаемъ

$$z = 1 + \frac{1}{u},$$

и получаемъ

$$\psi(u) = 3u^4 - 2u^3 - 24u^2 - 23u - 6$$

$$\begin{array}{ll} & \psi(u) \\ (3) \cdots\cdots & - \\ (4) \cdots\cdots & + \end{array}$$

Величина u заключается между 3 и 4.

Пусть

$$u = 3 + \frac{1}{t},$$

будетъ $\chi(t) = 102t^4 - 103t^3 - 72t^2 - 34t - 3$

$$\begin{array}{ll} & \chi(t) \\ (1) \cdots\cdots & - \\ (2) \cdots\cdots & + \end{array}$$

t заключается между 1 и 2. Остановимся и возмемъ предѣлы перваго корня $f(x)$; именно:

$$x_{\prime} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{4}{7} = 3.570$$

$$x_{\prime} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{9}{61} = 3.562$$

И такъ для истинной величины $x_{\prime}$ можемъ взять только $$x_{\prime} = 3 \cdot 5.$$

II. Мы сперва положили

$$x = 3 + \frac{1}{y},$$

и нашли потомъ для y другую величину между 3 и 4; дѣлаемъ

$$y = 3 + \frac{1}{z},$$

и получаемъ

$$\varphi(z) = 8z^4 - 15z^3 - 33z^2 - 15z - 2$$

$$\begin{array}{ll} & \varphi(z) \\ (3) \cdots\cdots & - \\ (4) \cdots\cdots & + \end{array}$$

т. е. корень z содержится между 3 и 4; дѣлаемъ еще

$$z = 3 + \frac{1}{u}$$

будетъ

$$\psi((u) = 101u^4 - 246u^3 - 264u^2 - 81u - 8$$

$$\begin{array}{ll} & \psi(u) \\ (3) \cdots\cdots & - \\ (4) \cdots\cdots & +. \end{array}$$

Поэтому u найдемъ между 3 и 4. Остановимся, и напишемъ оба предѣла другаго корня $f(x)$:

$$x_2 = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}} = 3\frac{3}{10} = 3.300$$

$$x_2 = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}} = 3\frac{10}{33} = 3{:}302$$

Для истинной величины корня можемъ взять только

$$x_2 = 3\cdot3.$$

И такъ мы нашли приближенную величину обоихъ положительныхъ корней $f(x)$, которые по способу Фурье оказались между 3 и 4, имѣнно:

$$x_1 = 3\cdot3 \text{ и } x_2 = 3\cdot5.$$

Разыщемъ теперь два отрицательные корня той же функціи $f(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x + 2$; для этого поставимъ вмѣсто x, $-x$; и станемъ искать положительные корни новой функціи:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 9x + 2\\
f' &= 4x^3 + 18x^2 + 12x - 9\\
f'' &= 12x^2 + 36x + 12\\
f''' &= 24x + 36\\
f^{\text{IV}} &= 24.
\end{aligned}$$

	0.	I.	II.	III.	IV.
(0)......	+	—	+	+	+
(1)......	+	+	+	+	+

Оба корня оказываются между 0 и 1. Пусть

$$x = \frac{1}{y}$$

преобразованное уравненіе должно дать для y двѣ положительныя величины больше единицы; иначе корни $f(-x)$ оба мнимые. Подставимъ, и будетъ

$$\begin{aligned}
F(y) &= 2y^4 - 9y^3 + 6y^2 + 6y + 1 \\
F' &= 8y^3 - 27y^2 + 12y + 6 \\
F'' &= 24y^2 - 54y^2 + 12 \\
F''' &= 48y - 54 \\
F^{\text{IV}} &= 48.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\cdots\cdots + \quad - \quad - \quad - \quad + \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; - \\
(2)\cdots\cdots - \quad - \quad 0 \quad + \quad + \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; +
\end{array}\right\}\ \text{одинъ корень}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(3)\cdots\cdots - \quad + \quad + \quad + \quad + \\
(4)\cdots\cdots + \quad + \quad + \quad + \quad +
\end{array}\right\}\ \text{другой корень.}$$

Дѣйствительно, y имѣетъ двѣ положительныя величины: одну между 1 и 2; другую между 3 и 4.

III. Займемся первою. Пусть

$$y = +\frac{1}{z},$$

Ясно, что здѣсь тѣже самыя вычисленія, какъ и для перваго корня (I,), т. е.

$$\varphi(z) = 6z^4 - z^3 - 9z^2 - z + 2$$

и z заключается между 1 и 2; сдѣлавъ

$$z = 1 + \frac{1}{u},$$

получаемъ

$$\psi(u) = 3u^4 - 2u^3 - 24u^2 - 23u - 6$$

величина u между 3 и 4; дѣлаемъ

$$u = 3 + \frac{1}{t},$$

находимъ

$$\chi(t) = 102t^4 - 103t^3 - 72t^2 - 34t - 3$$

t между 1 и 2; еще положимъ

$$t = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\theta(\alpha) = 110\alpha^4 - 79\alpha^3 - 231\alpha^2 - 305\alpha - 102$$

Величина α между 2 и 3. И такъ

$$-x_{,,,} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{5}{9} = 0.565$$

$$-x_{,,,} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{14}{25} = 0,56$$

IV. Мы уже положили

$$-x = \frac{1}{y}$$

нашли для y другую величину между 3 и 4. Сдѣлавъ

$$y = 3 + \frac{1}{z}.$$

нашли бы точно тоже что и для $x_{,,}$, именно, что z содержится между 3 и 4; потомъ

$$z = 3 + \frac{1}{u}$$

u содержится тоже между 3 и 4.

$$\varphi(u) = 101u^4 - 246u^3 - 264u^2 - 31u - 8.$$

Положимъ еще

$$u = 3 + \frac{1}{t},$$

найдемъ

$$\psi(t) = 1088t^4 - 2601t^3 - 2976t^2 - 966t - 101$$

опять t между 3 и 4; сдѣлавъ

$$t = 3 + \frac{1}{\alpha}$$

α будетъ тоже между 3 и 4, и такимъ образомъ получимъ предѣлы IV. корня $f(x)$.

$$x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}} = \frac{109}{360} = 0.3026$$

$$x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{142}{469} = 0.3027$$

откуда $\qquad x_{II} = 0 \cdot 3.$

Видимъ теперь, что

$$f(x) = x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

имѣетъ всѣ четыре вещественные корня.

$$x_I = \quad 3 \cdot 5$$
$$x_{II} = \quad 3 \cdot 302$$
$$x_{III} = -0 \cdot 5$$
$$x_{IV} = -0 \cdot 302.$$

ЛЕКЦІЯ X.

Вычисленіе корней.

(Продолженіе.)

Наконецъ покажемъ теперь, что способъ непрерывныхъ дробей также легко разбиваетъ пары самыхъ близкихъ между собой корней, или сразу обличаетъ, что они мнимые.

Возмемъ примѣръ, который въ концѣ VIII. лекціи оставили не рѣшеннымъ: именно

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 204x^2 + 205x + 10500;$$

тамъ нашли только, что между 10 и 11 $f(x)$ имѣетъ два корня вещественные: провѣримъ это, и разобьемъ ихъ.

Пусть $x = 10 + \frac{1}{y}$, будетъ

$$F(y) = f^{\circ}(10)y^4 + f'(10)y^3 + \frac{f''(10)}{1.2}y^2 + \frac{f'''(10)}{1.2.3}y + \frac{f^{\text{IV}}(10)}{1.2.3.4}$$

или

$$
\begin{aligned}
F(y) &= 150y^4 - 475y^3 + 336y^3 + 38y + 1 \\
F' &= 600y^3 - 1425y^2 + 672y + 38 \\
F'' &= 1800y^2 - 2850y + 672 \\
F''' &= 3600y - 2850 \\
F^{\text{IV}} &= 3600.
\end{aligned}
$$

Прежде всего замѣтимъ, что если $F(y)$ имѣетъ два корня $y > 1$,
и они вещественные, то корни $f(x)$, оказавшіеся между 10 и 11, оба вещественные. Подставя 1 и 2 вмѣсто y, имѣемъ

$$
\begin{array}{lccccc}
 & F^0 & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\
(1)\cdots\cdots & + & - & - & + & + \\
(2)\cdots\cdots & + & + & + & + & +
\end{array}
$$

И такъ два корня y, оказываются между 1 и 2, оба > 1. Чтобъ узнать, точно ли они вещественные, и потомъ разбить ихъ, если можно, сдѣлаемъ

$$y = 1 + \frac{1}{z};$$

будетъ

$$\varphi(z) = F(1)z^4 + F'(1)z^3 + \frac{F''(1)}{1.2}z^2 + \frac{F'''(1)}{1.2.3}z + \frac{F^{\text{IV}}(1)}{1\cdot2.3.4}$$

или

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= 50z^4 - 115z^3 - 189z^2 + 125z + 150 \\
\varphi' &= 200z^3 - 345z^2 - 378z + 125 \\
\varphi'' &= 600z^2 - 690z - 378 \\
\varphi''' &= 1200z - 690 \\
\varphi^{\text{IV}} &= 1200.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \varphi^0 & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\
(1)\cdots\cdots & + & - & - & + & + \\
 & 2 & 1 & 1 & 0 & \\
(2)\cdots\cdots & - & - & + & + & + \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l} (3) \cdots\cdots - \quad + \quad + \quad + \quad + \\ (4) \cdots\cdots + \quad + \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

Оба корня $\varphi(z)$ отдѣлились: одинъ между 1 и 2, другой между 3 и 4; оба корня $f(x)$ вещественные.

I. Займемся первымъ.

Пусть $z_1 = 1 + \frac{1}{u}$ будетъ

$$\Phi(u) = \varphi(1)u^4 + \varphi'(1)u^3 + \frac{\varphi''(1)}{1.2}u^2 + \frac{\varphi'''(1)}{1.2.3}u + \frac{\varphi^{IV}(1)}{1.2.3.4}$$

или

$$\Phi(u) = 21u^4 - 398u^3 - 234u^2 + 83u + 50;$$

откуда

$$\begin{array}{l} \qquad \Phi^0 \\ (19) \cdots\cdots - \\ (20) \cdots\cdots +. \end{array}$$

И такъ корень $\Phi(u)$ заключается между 19 и 20.

II. Займемся вторымъ корнемъ $\varphi(z)$.

Пусть $z_2 = 3 + \frac{1}{t}$ будетъ

$$\theta(t) = \varphi(3)t^4 + \varphi'(3)t^3 + \frac{\varphi''(3)}{1.2}t^2 + \frac{\varphi'''(3)}{1.2.3}t + \frac{\varphi^{IV}(3)}{1.2.3.4}$$

$$\theta(t) = 231t^4 - 1286t^3 - 1476t^2 - 485t - 50,$$

откуда

$$\begin{array}{l} \qquad \theta^0 \\ (6) \cdots\cdots - \\ (7) \cdots\cdots +. \end{array}$$

Такимъ образомъ мы разбили пару вещественныхъ корней $f(x)$, оказавшихся между 10 и 11, именно

$$x_1 = 10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19}}}$$

$$x_2 = 10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}}$$

или $$x_1 = 10\tfrac{20}{39} = 10.5\ldots\ldots$$

$$x_2 = 10\tfrac{19}{25} = 10.76\ldots\ldots$$

Отсюда легко получить корни $f(x)$ въ первомъ ея видѣ, именно:

$$f(x) = 10500x^4 + 205x^3 - 204x^2 - 2x + 1.$$

Здѣсь $$x' = \frac{1}{10.5} = 0.095$$

$$x'' = \frac{1}{10.76} = 0.093.$$

корни слишкомъ близки, чтобъ скоро угадать приличное подстановленіе, которое бы отдѣлило ихъ.

2) Этихъ примѣровъ достаточно для убѣжденія, что соединивъ способъ непрерывныхъ дробей со способомъ Фурье, мы не только сразу отдѣлимъ и узнаемъ мнимые корни, когда они есть, но и для вещественныхъ корней легко сблизимъ предѣлы до первой десятичной цыфры; но если требуется большое приближеніе, то составлять преобразованныя уравненія было бы очень трудно; для этого Лагранжъ указалъ на упрощеніе, которымъ гораздо легче можно бы получать дальнѣйшее приближеніе.

Но чтобъ это было понятнѣе, считаемъ за нелишнее напомянуть здѣсь о главнѣйшихъ изъ свойствъ непрерывныхъ дробей, которыя впрочемъ излаются и въ элементарныхъ курсахъ.

Положимъ, что корень $f(x)$ n-вой степени, изображается непрерывною дробью

$$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots}}} \quad (1),$$

Подходящія дроби, какъ извѣстно, будутъ:

1) $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}$

2) $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}$

3) $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}$

4) $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_3 + q_1}{q_2 q_3 + 1}$ и т. д.

Чѣмъ больше возмемъ частныхъ q_1, q_2, $q_3 \ldots$ тѣмъ подходящая дробь ближе къ x, и при томъ такъ, что если возмемъ *нечетное* число частныхъ q_1, $q_2 \ldots$ подходящая дробь *меньше* корня; если возмемъ ихъ *четное* число, подходящая дробь *больше* корня. И такъ

$$\frac{P_1}{Q_1} < x \quad \frac{P_2}{Q_2} > x$$

$$\frac{P_3}{Q_3} < x \quad \frac{P_4}{Q_4} > x \text{ и т. д.}$$

Корень всегда заключается между двумя смѣжными подходящими дробями.

Чтобъ найти законъ подходящихъ дробей, замѣтимъ, что происхожденіе ихъ можно представить себѣ такъ:

1) частныя: $q_1 \quad q_2 \quad q_3 \qquad q_4 \ldots q_{i-2};\ q_{i-1};\ q_i$

2) подход. дроби:
$$\begin{cases} \frac{1}{0},\ \frac{q_1}{1},\ \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2},\ \frac{q_1 q_2 q_3 + q_3 + q_1}{q_2 q_3 + 1} \ldots\ldots \\ \frac{P_0}{Q_0},\ \frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3} \ldots\ldots \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}},\ \frac{P_i}{Q_i}. \end{cases}$$

Въ строкѣ (1) напишемъ всѣ частныя; подъ первыми двумя изъ нихъ въ строкѣ (2) ставимъ двѣ подходящія дроби $\frac{1}{0}$ и $\frac{q_1}{1}$, (первую только для того, чтобъ сдѣлать очевиднѣе законъ); слѣдующія дроби, одна за другою получатся, если числителя (наприм. q_1) *послѣдней* дроби помножимъ на частное (q_2), принадлежащее *новой* дроби, и придадимъ числителя (1), *предпослѣдней* дроби; эта сумма ($q_1 q_2 + 1$), дастъ числителя новой подходящей дроби. Точно также составленная сумма изъ знаменателей послѣдней и предпослѣдней дробей, дастъ знаменателя, ($1 \cdot q_2 + 0$), и новая дробь готова:

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 q_2 + P_0}{Q_1 q_2 + Q_0} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2};$$

Поэтому и

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 q_3 + P_1}{Q_2 q_3 + Q_1} = \frac{(q_1 q_2 + 1) q_3 + q_1}{q_2 q_3 + 1}$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_3 q_4 + P_2}{Q_3 q_4 + Q_2} = \frac{[(q_1 q_2 + 1) q_3 + q_1] q_4 + q_1 q_2 + 1}{(q_2 q_3 + 1) q_4 + q_2}$$

. . . .

$$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i-1} q_i + P_{i-2}}{Q_{i-1} q_i + Q_{i-1}}.$$

Чтобъ не оставить ни малѣйшаго сомнѣнія въ общности этого закона подходящихъ дробей, докажемъ, что если онъ существуетъ для

$$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i-1} q_i + P_{i-2}}{Q_{i-1} q_i + Q_{i-2}}$$

то онъ существуетъ и для

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{P_i q_{i+1}+P_{i-1}}{Q_i q_{i+1}+Q_{i-1}}.$$

По свойству непрерывныхъ дробей знаемъ, что дробь $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ есть та же $\frac{P_i}{Q_i}$, въ которую вмѣсто q_i вставили $q_i+\frac{1}{q_{i+1}}$ подставимъ же и будетъ

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{P_{i-1}\left(q_i+\frac{1}{q_{i+1}}\right)+P_{i-2}}{Q_{i-1}\left(q_i+\frac{1}{q_{i+1}}\right)+Q_{i-2}}.$$

$$=\frac{P_{i-1}(q_i q_{i+1}+1)+P_{i-2}\,q_{i+1}}{Q_{i-1}(q_i q_{i+1}+1)+Q_{i-2}\,q_{i+1}}$$

Но

$$P_{i-2}=P_i-P_{i-1}\,q_i$$

$$Q_{i-2}=Q_i-Q_{i-1}\,q_i,\text{ то}$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{P_{i-1}q_i q_{i+1}+P_{i-1}+(P_i-P_{i-1}q_i)q_{i+1}}{Q_{i-1}q_i q_{i+1}+Q_{i-1}+(Q_i-Q_{i-1}q_i)q_{i+1}}$$

наконецъ

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{P_i q_{i+1}+P_{i-1}}{Q_i q_{i+1}+P_{i-1}}\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Прежде видѣли справедливость этого закона для дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}\text{ и }\frac{P_2}{Q_2};$$

то онъ справедливъ и для

$$\frac{P_3}{Q_3},\ \frac{P_4}{Q_4};\ldots$$

и для всѣхъ подходящихъ дробей вообще.

Сдѣлавъ теперь

$$P_i Q_{i-1}-P_{i-1}Q_i=z_i.$$

Докажемъ еще, что эта разность всегда равна положительной или отрицательной единицѣ, смотря потому: $\frac{P_i}{Q_i}$ меньше ли корня, т. е. когда i нечетное; или $\frac{P_i}{Q_i}$ больше корня, т. е. когда i четное, короче хотимъ доказать слѣдующее:

$$z_i = (-1)^i.$$

Взявъ три послѣдовательныя дроби

$$\frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}}, \quad \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}, \quad \frac{P_i}{Q_i}$$

мы уже доказали, что

$$P_i = P_{i-1}\, q_i + P_{i-2}$$
$$Q_i = Q_{i-1}\, q_i + Q_{i-2};$$

откуда

$$P_i Q_{i-1} = P_{i-1}\, Q_{i-1}\, q_i + P_{i-2}\, Q_{i-1}$$
$$P_{i-1}\, Q_i = P_{i-1}\, Q_{i-1}\, q_i + P_{i-1}\, Q_{i-2}$$

Потомъ

$$z_i = P_i Q_{i-1} - P_{i-1}\, Q_i = P_{i-2}\, Q_{i-1} - P_{i-1}\, Q_{i-2}$$
$$= -(P_{i-1}\, Q_{i-2} - P_{i-2}\, Q_{i-1}),$$

или $$z_i = -z_{i-1} \quad \ldots.(3);$$

подставя въ (3) вмѣсто i послѣдовательно

$$i-1, \quad i-2, \quad i-3, \text{ и т. д.}$$

получимъ

$$z_i = -z_{i-1}$$
$$z_{i-1} = -z_{i-2}$$
$$z_{i-2} = -z_{i-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_3 = -z_2$$
$$z_2 = -z_1.$$

перемноживъ обѣ части, имѣемъ

$$z_i(z_{i-1} z_{i-2} \ldots z_2) = (-z_{i-1})(-z_{i-1})(-z_2)(-z_1)$$

$$= (-1)^{i-1}(z_{i-1} z_{i-2} \ldots z_2) z_1$$

или $$z_i = (-1)^{i-1} z_1$$

но какъ $$z_1 = P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = -1$$

потому, что $Q_0 = 0$, $P_0 = 1$, $Q_1 = 1$;

то $z_i = P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = (-1)^i \ldots\ldots (4)$.

Если въ непрерывной дроби (1) возмемъ последнее полное частное t, напишемъ ее такъ

$$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ldots\ldots + \cfrac{1}{t}}}}$$

и положимъ, что последняя подходящая дробь передъ этимъ частнымъ есть $\frac{P_i}{Q_i}$, то по (2)

$$x = \frac{P_i t + P_{i-1}}{Q_i t + Q_{i-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Это будетъ точная величина x. Если желаемъ знать погрѣшность, когда вмѣсто (5) возмемъ подходящую дробь $\frac{P_i}{Q_i}$, то стоитъ только найти между ими разность, и будетъ

$$\psi = x - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_i t + P_{i-1}}{Q_i t + Q_{i-1}} - \frac{P_i}{Q_i}$$

$$= \frac{P_i t Q_i + P_{i-1} Q_i i - P_i Q t - P_i Q_{i-1}}{(Q_i t + Q_{i-1}) Q_i}$$

$$= \frac{P_{i-1} Q_i - P_i Q_{i-1}}{Q_i (Q_i t + Q_{i-1})} = \frac{-(-1)^i}{Q_i (Q_i t + Q_{i-1})} = \frac{(-1)^{i+1}}{Q_i (Q_i t + Q^{i-1})} (6).$$

Но $t > 1$, слѣд.

$$Q_i < Q_i t + Q_{i-1}$$

и $$Q_i^2 < Q_i (Q_i t + Q_{i-1})$$

поэтому

$$\psi\left[=\frac{(-1)^{i+1}}{Q_i(Q_i t+Q_{i-1})}\right]<\frac{(-1)^{i+1}}{Q_i^2}\ \ldots\ldots\ldots (7).$$

Но ψ есть погрѣшность, которую допускаемъ, принявъ подходящую дробь $\frac{P_i}{Q_i}$ за величину x; сталобыть эта погрѣшность всегда меньше 1, раздѣленной на квадратѣ знаменателя дроби, которую взяли за подходящую. Степень $i+1$, покажетъ, когда ψ съ $+$ и когда съ $-$.

Теперь можемъ приступить къ тому упрощенію, о которомъ выше упомянули.

Изъ (6) имѣемъ

$$\frac{P_i}{Q_i}=x-\frac{(-1)^{i+1}}{Q_i(Q_i t+Q_{i-1})}\ \ldots\ldots\ldots (8),$$

или

$$P_iQ_it+P_iQ_{i-1}=xQ_i(Q_it+Q_{i-1})-(-1)^{i+1}$$

Но $\quad -(-1)^{i+1}=(-1)^{i+2}=(-1)^i,$

и по (4) $\quad P_iQ_{i-1}=(-1)^i+P_{i-1}Q_i,$

то будетъ

$$P_iQ_it+(-1)_i+P_{i-1}Q_i=xQ_i^2t+xQ_iQ_{i-1}+(-1)^i,$$

$$P_it+P_{i-1}=xQ_it+xQ_{i-1}$$

откуда

$$t=\frac{xQ_{i-1}-P_{i-1}}{P_i-xQ_i}=\frac{Q_{i-1}}{Q_i}\left(\frac{x-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}}{\frac{P_i}{Q_i}-x}\right)$$

$$=\frac{Q_{i-1}}{Q_i}\cdot\frac{x-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}-\frac{P_i}{Q_i}+\frac{P_i}{Q_i}}{\frac{P_i}{Q_i}-x}$$

$$=\frac{Q_{i-1}}{Q_i}\left(\frac{\dfrac{P_i}{Q_i}-\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}}{\dfrac{P_i}{Q_i}-x}-\frac{\dfrac{P_i}{Q_i}-x}{\dfrac{P_i}{Q_i}-x}\right)$$

$$=\frac{Q_{i-1}}{Q_i}\left(\frac{\dfrac{P_i}{Q_i}-\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}}{\dfrac{P_i}{Q_i}-x}-1\right)$$

$$=\frac{Q_{i-1}}{Q_i}\left(\frac{P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i}{Q_iQ_{i-1}\left(\dfrac{P_i}{Q_i}-x\right)}-1\right)$$

Наконецъ $t=\dfrac{(-1)^i}{Q_i^2\left(\dfrac{P_i}{Q_i}-x\right)}-\dfrac{Q_{i-1}}{Q_i}$ . . . .(9).

Данная $f(x)$ n-й степени имѣетъ n корней; то если въ (9) поставимъ разныя величины для x, получимъ разныя величины для t, и число ихъ будетъ n.

Ежели въ $f(x)$ вида:

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}\ldots+A_n$$

подставимъ $$x=\frac{P_it+P_{i-1}}{Q_it+Q_{i-1}}$$

то получимъ той же степени функцію

$$t^n-at^{n-1}+a_1t^{n-2}+\ldots+a_n$$

и это подстановленіе, ни сколько не упростило бы опредѣленія величины t; но означивъ чрезъ t', t'', $t'''\ldots t^{(n)}$ корни послѣдняго уравненія, имѣемъ

$$t'+t''+t'''+\ldots\ldots+t^{(n)}=a,$$

откуда $$t'=a-t''-t'''-\ldots-t^{(n)}\ \ldots\ldots(10).$$

Въ самомъ дѣлѣ, поставя x'' вмѣсто x, найдемъ

$$t'' = \frac{(-1)^i}{Q_i^2} \cdot \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''} - \frac{Q_{i-1}}{Q_i};$$

$$-t'' = -\frac{(-1)^i}{Q_i^2} \cdot \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''} + \frac{Q_{i-1}}{Q_i}$$

$$= \frac{Q_{i-1}}{Q_i} + \frac{(-1)^{i+1}}{Q_i^2} \cdot \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''}$$

Поставя тудаже вмѣсто x, x''', x^{IV}, x^{V} ..... найдемъ подобныя выраженія для t'', t^{IV}, t^{V} ... потомъ въ (10) вмѣсто t'', t''', t^{IV} ..... ихъ величины, получимъ наконецъ

$$t' = a + \frac{(n-1)Q_{i-1}}{Q_i} + \frac{(-1)^{i+1}}{Q_i^2}\left(\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''} + \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x'''} + \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x^{\text{IV}}} + \cdots\right) \ldots\ldots (11)$$

Поставя вмѣсто $\frac{P_i}{Q_i}$ величину его (8), перемѣня t на t', x на x', найдемъ

$$t' = a + \frac{(n-1)Q_{i-1}}{Q_i} + \frac{(-i)^{i+1}}{Q_i^2} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{(x'-x'') + \frac{(-1)^i}{Q_i(Q_i t' + Q_{i-1})}} + \frac{1}{(x'-x'') + \frac{(-1)^i}{Q_i(Q_i t' + Q_{i-1})}} + \ldots\ldots\right)$$

$$= a + \frac{(n-1)Q_{i-1}}{Q_i} + (-1)^{i+1}$$

$$\left(\frac{1}{Q_i^2(x'-x'') + \frac{(-1)^i Q_i}{Q_i t + Q_{i-1}}} + \ldots\right)$$

Пусть $\frac{Q_i t + Q_{i-1}}{Q_i} = M$, гдѣ M всегда больше 1, потому что

$$Q_i t + Q_{i-1} > Q_i,$$

тогда

$$t' = a + \frac{(n-1)Q_{i-1}}{Q_i} + (-1)^{i+1}$$

$$\left(\frac{1}{Q_i^2(x'-x'') + \frac{(-1)^i}{M}} + \frac{1}{Q_i^2(x'-x''') + \frac{(-1)^i}{M}} + \ldots\right) (12)$$

M всегда увеличивается вмѣстѣ съ Q_i такъ, что что чѣмъ болѣе возмемъ частныхъ q_1, q_2 .... тѣмъ Q_i^2 и M будутъ становиться больше; дроби $\frac{(-1)^i}{M}$ съ увеличенiемъ M уменьшаются, и смотря по четному или нечетному i, увеличиваютъ или уменьшаютъ собою $Q_i^2(x'-x'')$ и проч.; но часъ отъ часу меньше, а между тѣмъ, при постоянныхъ $x'-x''$ и проч., члены $Q_i^2(x'-x'')$ и проч. безпрестанно увеличиваются, такъ что безъ чувствительной погрѣшности можемъ допустить, при дальнѣйшихъ приближенiяхъ

$$Q_i^2(x'-x'') + \frac{(-1)^i}{M} = Q_i^2(x'-x'') \text{ и проч.}$$

$$t' = a + \frac{(n-1)Q_{i-1}}{Q_i} + \frac{(-1)^{i+1}}{Q_i^2}\left(\frac{1}{x'-x''} + \frac{1}{x'-x'''} + \frac{1}{x'-x^{\text{IV}}} + \cdots\right) \cdots\cdots\cdots (13).$$

Но въ формулѣ (13) остается неизвѣстное количество a; надо исключить его.

Мы уже нашли

$$a = t' + t'' + t''' + \cdots + t^{(n)}$$

$$= \frac{-nQ_{i-1}}{Q_i} + \frac{(-1)^i}{Q_i^2}\left(\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x'} + \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x^{(n)}}\right)$$

откуда

$$a + \frac{(n-1)Q_{i-1}}{Q_i} = \frac{-Q_{i-1}}{Q_i} + \left(\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x'} + \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''} + \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x'''} + \cdots\cdots\right)$$

Но извѣстно, что

$$f(x) = (x-x')(x-x'')(x-x''')\cdots(x-x^{(n)}),$$

$$f'(x) = (x-x'')(x-x''')\cdots[x-x^{(n)}]$$
$$+ (x-x')(x-x''')\cdots(x-x^{(n)}) + \cdots \text{etc.}$$
$$= \frac{f(x)}{x-x'} + \frac{f(x)}{x-x''} + \frac{f(x)}{x-x'''} + \cdots + \frac{f(x)}{x-x^{(n)}}$$

Поставимъ вмѣсто x подходящую дробь $\frac{P_i}{Q_i}$ будетъ

$$\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}=\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x'}+\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x''}+\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x'''}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{\frac{P_i}{Q_i}-x^n}$$

и потому

$$a+\frac{(n-1)Q_i-1}{Q_i}=\frac{-Q_i-1}{Q_i}+\frac{(-1)^i}{Q^2}\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}$$

наконецъ

$$t'=\frac{-Q_i-1}{Q_i}+\frac{(-1)^i}{Q_i}\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}+A.$$

или

$$t'=\frac{(-1)^i}{Q_i^2}\cdot\frac{f'\frac{P_i}{Q_i}}{f\frac{P_i}{Q_i}}-\frac{Q_i-1}{Q_i}+\frac{(-1)^{i+1}}{Q_i^2}$$

$$\left(\frac{1}{x'-x''}+\frac{1}{x'-x'''}+\ldots\frac{1}{x'-x^{(n)}}\right)\ldots\ldots(14)^{*}).$$

Прежде всего замѣтимъ, что необходимо должно быть частное $t'>1$, покрайней мѣрѣ; потому что въ (14) вошло a, которое не <1. Вообще оно, цѣлое число съ дробью.

---

*) Рукопись X. лекціи, первоначально составленная, затерялась; припоминая читанное Г. Остроградскимъ, мы составили ее вновь, придерживаясь изложенію Лежандрову (Theorie des nombres). Все остальное послѣ формулы (14) сочли за не лишнее прибавить отъ себя. *С. Б.*

Вторая часть (14) состоитъ изъ трехъ членовъ: разсмотримъ каждый изъ нихъ особенно, чтобъ послѣ судить, какимъ образомъ вмѣстѣ они составятъ цѣлое число съ дробью, которую тоже обратимъ въ непрерывную съ какою угодно точностію.

Начнемъ съ послѣдняго члена, или лучше съ его множителя.

$$T = \frac{1}{x' - x''} + \frac{1}{x' - x'''} + \ldots\ldots \frac{1}{x' - x^{(n)}}$$

или, что тоже самое,

$$T = \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''} + \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x'''} + \ldots\ldots \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x^{(n)}}$$

Величина T перемѣняется при разныхъ подходящихъ дробяхъ $\frac{P_i}{Q_i}$; но безконечностью сдѣлаться не можетъ, иначе необходимо чтобъ одинъ изъ знаменателей былъ равенъ нулю:

$$\frac{P_i}{Q_i} - x'' = 0;$$

или чтобъ $P_i - Q_i x''$ былъ раціон. множитель $f(x)$; а мы разсматриваемъ функцію, неимѣющую такого множителя, или его исключимъ еще при отд. корней.

Между тѣмъ, какъ подходящая дробь $\frac{P_i}{Q_i}$ быстро приближается къ корню x', первое выраженіе T есть предѣлъ множителя въ послѣднемъ членѣ A; то если по прежнему способу (лекц. IX.) станемъ продолжать вычисленіе частныхъ и составленіе подходящихъ дробей, до тѣхъ поръ пока $A = \frac{(-1)^{i+1}}{Q_i^2}.T$ сдѣлается меньше какой нибудь данной дроби $\frac{1}{m}$, т. е.

$$\frac{T}{Q_i^2} < \frac{1}{m},$$

или $$Q_i > \sqrt{mT};$$

гдѣ T положительное; то погрѣшность величины t, вычисленной по (14), будетъ менѣе $\frac{1}{m}$.

Мы вправѣ говорить, что величина T съ увеличеніемъ $y = \frac{P_i}{Q_i}$, уменьшается. — Если это докажемъ для одной дроби

$$D = \frac{1}{y - x''} = \frac{1}{\frac{P_i}{Q_i} - x''},$$

то оно будетъ справедливо и для суммы подобныхъ дробей.

Но взявъ первую производ. отъ D по y, получимъ

$$(D)' = -\frac{1}{(y - x'')^2};$$

она отрицательная; сталобыть дробь D (лекц. I.) съ увеличеніемъ $y = \frac{P_i}{Q_i}$ уменьшается; поэтому и проч.

И такъ если бы мы могли, хотя приближенно знать величину T, *всегда конечную,* то могли бы избѣжать утомительнаго составленія преобразованныхъ уравненій для каждаго новаго частнаго, и прямо находить нѣсколько частныхъ t изъ (14), и при томъ всегда знать степень приближенія или погрѣшность

Но мы дѣйствительно найдемъ величину T, т. е. сумму дробей $\frac{1}{x' - x''}$ и проч., произшедшихъ отъ раздѣленія 1 на разность между искомымъ корнемъ $f(x)$ и всѣми ея остальными корнями, хотя бы нѣкоторые изъ нихъ были мнимые. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ что одинъ изъ корней

$$x^{(i)} = \alpha + \beta i,$$

то будетъ и другой

$$x^{(i+1)} = \alpha - \beta i;$$

сумма двухъ дробей

$$\frac{1}{x' - \alpha - \beta i} + \frac{1}{x' - \alpha + \beta i} = \frac{2(x' - \alpha)}{(x' - \alpha)^2 + \beta^2}$$

всегда вещественная; и можетъ сдѣлаться довольно значительною, когда $x' - a$, особливо β, очень малы; но ни когда не превзойдетъ наибольшей величины своей $\frac{1}{\beta}$.

И такъ если $f(x)$ дана цѣлая и раціональная, неимѣющая раціональнаго множителя, то количество T всегда конечное, вещественное, уменьшающееся и при томъ не нуль; мы легко найдемъ его численную величину.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x'} + \frac{1}{x - x''} + \frac{1}{x - x'''} + \ldots + \frac{1}{x - x^{(n)}},$$

откуда

$$\frac{1}{x - x''} + \frac{1}{x - x'''} + \ldots + \frac{1}{x - x^{(n)}} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x - x'}$$

$$= \frac{(x - x')\, f'(x) - f(x)}{(x - x')\, f(x)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

при $x = x'$, первая часть (15) обращается въ T, а вторая въ $\frac{1}{0}$; но это быть не можетъ, потому что

T есть конечная величина. И такъ по извѣстному правилу взявъ производныя числителя и знаменателя, получимъ

$$T = \frac{f'(x) + (x - x')f''(x) - f'(x)}{f(x) + (x - x')f(x)}$$

$$= \frac{(x - x')f''(x)}{f(x) + (x - x')f'(x)}.$$

Но какъ при $x = x'$, и это выраженіе принимаетъ величину $= 0$, что невозможно, то взявъ еще разъ производныя числителя и знаменателя, получимъ

$$T = \frac{f''(x) + (x - x')f'''(x)}{f'(x) + f'(x) + (x - x')f''(x)}$$

и наконецъ при $x = x'$,

$$T = \frac{f''(x')}{2f'(x')}.$$

Послѣдняя дробь, подходящая къ корню x', есть $\frac{P_i}{Q_i}$, то приближенная величина

$$T = \frac{f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{2f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Поставя (16) въ (14), получимъ

$$t' = \frac{(-1)^i}{Q_i^2} \cdot \frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} - \frac{Q_{i-1}}{Q_i} + \frac{(-1)^{i+1}}{Q_i^2} \cdot \frac{f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{2f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}$$

$$t' = \frac{(-1)^i}{Q_i^2}\left(\frac{f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} - \frac{f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)}{2f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)} + \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}}\right) \ldots (17).$$

Въ (17) мы небросаемъ ни одного члена; но подставляя вмѣсто x' подходящую дробь $\frac{P_i}{Q_i}$, больше или меньше близкую, непремѣнно вводимъ въ величину t' погрѣшность dt', тоже болѣе или менѣе значительную; и чрезъ нее въ самомъ корнѣ x' дѣлаемъ погрѣшность dx'. Сыщемъ ту и другую.

Если дана $f(x)$ степени n вида

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + \cdots A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n$$

то

$$f\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) = \frac{1}{Q_i^n}[AP_i^{n-1} + A_1P_i^nQ_i \cdots$$

$$+ A_nQ_i^n] \qquad = \frac{1}{Q_i^n} \cdot M$$

$$f'\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) = \frac{1}{Q_i^{n-1}}[nAP_i^{n-1} + (n-1)A_1P_i^{n-2}Q_i \cdots$$

$$+ A_{n-1}Q_i^{n-1}] = \frac{1}{Q_i^{n-1}} \cdot N$$

$$f''\left(\frac{P_i}{Q_i}\right) = \frac{1}{Q_i^{n-2}}[n(n-1)AP_i^{n-2}$$

$$+ (n-1)(n-2)A_1P_i^{n-3}Q_i \ldots + A_{n-2}Q_i^{n-2}] = \frac{1}{Q_i^{n-2}} \cdot R$$

будетъ

$$t' = \frac{(-1)^i}{Q_i}\left[\frac{N}{M} - \frac{R}{2N} + \frac{Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}}\right] \cdots (17)'.$$

Отсюда погрѣшность

$$dt' = \frac{(-1)^i}{Q_i^3} \cdot \frac{R}{2N}.$$

Взявъ изъ (8)

$$P_i - Q_i x' = \frac{(-1)^i}{(Q_i t' + Q_{i-1})} \cdots\cdots (18)$$

подставимъ $x' + dx'$ вмѣсто x'; $t' + dt'$ вмѣсто t', и вычтя (18), получимъ

$$-Q_i dx' = \frac{(-1)^i}{Q_i(t' + dt') + Q_{i-1}} - \frac{(-1)^i}{Q_i t' + Q_{i-1}}$$

$$= (-1)^i \cdot \left[\frac{Q_i t' + Q_{i-1} - Q_i t' - Q_{i-1} - Q_i dt'}{(Q_i t' + Q_{i-1})^2 + Q_i(Q_i t' + Q_{i-1})dt'}\right]$$

$$= -\frac{(-1)^i Q_i dt'}{(Q_i t' + Q_{i-1})^2 + Q_i(Q_i t' + Q_{i-1})dt'}$$

откуда

$$dx' = \frac{(-1)^i dt'}{Q^2_{i+1} + Q_i Q_{i+1} dt'}$$

но $$dt' = \frac{(-1)^i}{Q_i^3} \cdot \frac{R}{2N},$$

то $$dx' < \frac{(-1)^{2i}}{Q_i^3} \cdot \frac{1}{Q^2_{i+1}} \cdot \frac{R}{2N}$$

или $$dx' < \frac{1}{Q_i^3} \cdot \frac{1}{Q^2_{i+1}} \cdot \frac{R}{2N} \cdots\cdots\cdots (19).$$

Формула, посредствомъ которой легко найдемъ предѣлъ послѣдней подходящей дроби.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что разлагая (17)' въ непрерывную дробь, получили

$$t' = q_{i+1} + \cfrac{1}{q_{i+2} + \cfrac{1}{q_{i+3} + \&.}}$$

посмотримъ на которомъ изъ частныхъ q_{i+2}, q_{i+1}, и проч. должно остановиться.

Положимъ, что послѣднее изъ частныхъ, принадлежащихъ корню есть

$$q_{i+\lambda}$$

и послѣдняя подходящая дробь, посредствомъ его получена

$$\frac{P_{i+\lambda}}{Q_{i+\lambda}}$$

Разность между ею и корнемъ x', или погрѣшность

$$\psi\left(=x'-\frac{P_{i+\lambda}}{Q_{i+\lambda}}\right)<\frac{1}{Q^2_{i+\lambda}}\ldots(20).$$

И такъ разложеніе величины t въ непрерывную дробь можемъ продолжать до того изъ частныхъ $q_{i+\lambda}$, при которомъ порядокъ (20) не больше порядка (19), потому что dx' и ψ оба произошли отъ dt, И такъ мы остановимся на той изъ новыхъ подходящихъ дробей, которой знаменатель

$$Q_{i+\lambda} \text{ не } > \sqrt{Q_i^3 Q^2_{i+1}\frac{2N}{R}}\cdots\cdots(21),$$

Формула (19) и (21) покажутъ намъ предѣлъ послѣдней подход. дроби; а форм. (20) назначитъ, до которой десятичной цыфры продолжать дѣленіе той дроби, еслибъ захотѣли привести ее въ десятичную.

Пояснимъ теперь это примѣрами, а послѣ приведемъ еще нѣкоторыя общія замѣчанія.

Лежандръ въ своей Theorie des nombres, въ поясненіе Лагранжева способа, ищетъ корни уравненія

$$x^3-x^2-2x+1=0;$$

и даетъ для одного изъ корней x_1 слѣдующія частныя и подходящія дроби, выведенныя не изъ формулы (14), а просто (лекц. IX.) изъ преобразованныхъ уравненій:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 4 & 20 & 2 & 3 & 1 & 6 & 10 & \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{9}{5} & \frac{182}{101} & \frac{373}{207} & \frac{1301}{722} & \frac{1674}{929} & \frac{11345}{6296} & \frac{115124}{63889}. \end{array}$$

Возмемъ $i = 3$; $\frac{P_i}{Q_i} = \frac{9}{5}$; $Q_{i-1} = 1$, и подставя въ выраженія входящія въ формулу (17), имѣемъ

$$f^0\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{1}{125},\ M = -1;$$

$$f'\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{103}{25},\ N = 103;$$

$$f''\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{44}{5},\ R = 44;$$

а изъ (17)′

$$t' = \frac{1}{5}\left(103 + \frac{22}{103} - 1\right)$$

или

$$t = \frac{10528}{515} = 20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \left(\cfrac{1}{2}\right)}}}}$$

И такъ сразу получили пять частныхъ

$$20,\ 2,\ 3,\ 1 \text{ и } 6,$$

принадлежащихъ корню. Послѣднее частное 2, непринадлежитъ корню; надобно остановиться на дроби

$$\frac{P_8}{Q_8} = \frac{11345}{6296}.$$

Это мы видимъ чрезъ сравненіе съ примѣромъ Лежандровымъ; но могли бы узнать и по форм. (19). Въ самой вещи, найдя первое частное

$$q_{i+1} = 20,$$

заключающееся въ t', получаемъ $Q_{i+1} = 101$, и изъ (19)

$$dx < \frac{-1}{(5)^3(101)^2} \cdot \frac{22}{103} < -\frac{1}{5400000}$$

откуда должно взять (21)

$$Q_{i+\lambda}, \text{ не} > \sqrt{5400000} \text{ не } > 2300.$$

И такъ по (19) мы бы должны остановиться на седмой подходящей дроби

$$\frac{P_7}{Q_7} = \frac{1674}{929}$$

и тѣмъ лучше: иногда мы потеряемъ одну подходящую дробь, но никогда не возмемъ лишней.

Подставимъ теперь $\frac{P_7}{Q_7}$ въ $(17)'$.

Здѣсь

$$i = 7, \quad Q_{i-1} = 722, f^{\circ}\left(\frac{1674}{929}\right) = \frac{-559}{(929)^3}, \ \mathrm{M} = -559$$

$$f'\left(\frac{1674}{929}\right) = \frac{3570454}{(929)^2}, \ \mathrm{N} = 3570454$$

$$f''\left(\frac{1674}{929}\right) = \frac{8186}{929}, \ \mathrm{R} = 8186.$$

Изъ (17). найдемъ

$$t' = \frac{1}{929}\left(\frac{3570454}{559} + \frac{8186}{7140908} - 722\right)$$

и наконецъ

$$t' = \frac{2261423192 1222}{3708352074388}$$

$$= 6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{5 + \text{и проч.}}}$$

и потомъ

первый періодъ, второй періодъ

$$x' = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}}}}}}}$$

$$\cfrac{1}{57 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)}}}}}}}}}.$$

Прежде нежели составимъ подходящія дроби, посмотримъ на которой должно остановиться.

Здѣсь $i = 7$; $Q_i = 929$; $Q_{i+1} = 6296$,

$$dx < \frac{1}{2440000000000000000}$$

и $$Q_{i+\lambda} \text{ не } > 4900000000.$$

Теперь найдемъ всѣ новыя подходящія дроби

6	10	5	2	57	1	1
$\frac{1674}{929}$	$\frac{11345}{6296}$	$\frac{115124}{63889}$	$\frac{586965}{325741}$	$\frac{1289054}{715371}$	$\frac{74063043}{41101888}$	$\frac{75352097}{41817259}$

1	2	1	1	1
$\frac{149355140}{82919147}$	$\frac{224707237}{124736406}$	$\frac{598769614}{332391959}$	$\frac{823476851}{457128365}$	$\frac{1422246465}{789520324}$

1	2	
$\frac{2245723316}{1246648689}$	$\frac{3667969781}{2036169013}$	$\left(\frac{9581662878}{5354986715}\right)$

Очевидно что послѣдняя дробь $\frac{3667969781}{2036169013}$, на которой должны остановиться, даетъ осьмнадцать цыфръ вѣрныхъ: послѣдняя дробь перваго періода, $\frac{1674}{929}$, даетъ только шесть цыфръ; приближеніе утроивается.

Вообще представляется вопросъ: сколько нужно приготовить по первому способу (лекц. IX.), неполныхъ частныхъ или подходящихъ дробей, чтобы можно было начать приближеніе по формулѣ (17).

Для этого окончимъ разсмотреніе всѣхъ трехъ членовъ формулы (14). О послѣднемъ членѣ A уже говорили, и величину его множителя T выразили формулою (16).

Второй членъ (14)

$$\frac{Q_{i-1}}{Q_i} = \frac{Q_{i-1}}{Q_{i-1}\,q_i + Q_{i-2}} = \frac{1}{q_i + \dfrac{Q_{i-2}}{Q_{i-1}}}$$

Подобнымъ образомъ

$$\frac{Q_{i-2}}{Q_{i-1}} = \frac{1}{q_{i-1} + \dfrac{Q_{i-3}}{Q_{i-2}}}$$

$$\frac{Q_{i-1}}{Q_i} = \frac{1}{q_i + \dfrac{1}{q_{i-1} + \text{etc.}}}$$

Если начнемъ приложеніе (17) съ $q_i =$ или > 2,

то $$\frac{Q_{i-1}}{Q_i} < \tfrac{1}{2}.$$

Далѣе, въ составъ перваго члена вошелъ коэфиціентъ a, цѣлое число не < 1; слѣд. первый членъ непремѣнно содержитъ въ себѣ цѣлое число, а иногда и все первое частное q_{i+1} получаемое изъ t'.

Потомъ, при отдѣленіи корня x', данной $f(x)$ и корня y', ея преобразованной $F(y)$ (лекц. IX.), мы всегда имѣемъ предѣлы:

первaго $\qquad q_1$ и $q_1 + 1$

втораго $\qquad q_2$ и $q_2 + 1$

и двѣ строки знаковъ для

$$f^0,\ f' \text{ и } f''$$

отъ постановленія чиселъ

$$q_1 \text{ и } q_1 + 1;$$

слѣд. всегда можемъ разсчитать знаки членовъ (17).

Нельзя начинать приближенія (17) прямо съ цѣлаго числа корня x', или съ перваго частнаго q_1, потому что формула (14) выведена въ предположеніи, что Q_{i-1} не нуль; а тутъ оно было бы $= 0$.

Посмотримъ, когда можно начинать приближеніе со второй подходящей дроби: знаменатель ея Q_2 можетъ быть $= 1$ и > 1; пусть знаменатель

$$Q_2 = 1$$

но въ тоже время $\frac{f''}{2f'}$ таково, что сумма

$$\left(-\frac{f''}{2f'} + \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}}\right) < 1 \cdots\cdots\cdots (22);$$

и сверхъ того эта сумма имѣетъ противный знакъ съ первымъ членомъ

$$\frac{f'}{f},$$

то цѣлое число, или неполное частное, въ немъ заключающееся, непремѣнно будетъ разниться отъ полнаго частнаго, < 1, т. е. будетъ принадлежать корню.

И такъ когда существуетъ условіе (22), можемъ начинать приложеніе (17) прямо съ второй подходящей дроби, какая бы она ни была, и найдемъ по меньшей мѣрѣ одно частное, принадлежащее корню. Но если знаменатель второй подходящей дроби $Q_2 =$ или > 2, то всегда можемъ начинать съ нее приложеніе формулы (17), даже хотя бы условіе (22) не удовлетворялось, потому что изъ (19) всегда будетъ покрайнѣй мѣрѣ:

$$dx < \frac{1}{Q_i^3} \cdot \frac{1}{Q^2{}_{i+1}} \cdot \frac{R}{2N} < \frac{1}{(2)^5} < 0 \cdot 03.$$

Въ примѣрѣ мы начали первое приближеніе по (17) съ $i = 3$, или съ третьей подходящей дроби

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{9}{4};$$

не можемъ ли, какъ сей часъ замѣтили, начать со второй

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}.$$

$$Q_i = 1; \quad Q_{i-1} = 1; \quad Q_{i+1} = \tfrac{9}{5}$$

$$f(\tfrac{2}{1}) = 1; \; f'(\tfrac{2}{1}) = 6; \; f''(\tfrac{2}{1}) = 10.$$

Изъ (22) имѣемъ

$$-\frac{f''}{2f'} + \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}} \left(= -\frac{10}{12} + 1 \right) = \tfrac{1}{6},$$

съ тѣмъ же знакомъ что и $\frac{f'}{f} = \frac{6}{1}$.

Сталобыть со второй подходящей дроби нельзя здѣсь начинать приближеніе по (17), изъ котораго получили бы

$$t = \tfrac{1}{1}(\tfrac{6}{1} - \tfrac{5}{6} + 1) = 6\tfrac{1}{6}$$

и q_{i+1} вышло бы 6, а должно быть 4, и это потому что $Q_i < 2$ *).

---

*) Мы не то хотѣли сказать, чтобы формулу (17) нельзя было прилагать *вообще* ко второй подходящей дроби, но что при $Q_2 = 1$, она не всегда даетъ *сразу* настоящую величину третьяго частнаго, q_3; однако послѣ нѣсколькихъ подстановленій наведетъ непремѣнно на истин. величину q_3; даже такъ, что еслибъ мы въ первый разъ подставили на удачу какую нибудь дробь, и тогда форм. (17) черезъ нѣсколько пріемовъ наведетъ на истинную величину третьяго частнаго. Но очень можетъ случиться, что эти пріемы потребуютъ больше работы, нежели составленіе и рѣшеніе двухъ преобразованныхъ уравненій (лекц. IX.).

Это очевидно изъ свойства самой формулы (17): она выражаетъ полное, вѣрное частное, непремѣнно цѣлое число съ дробью, и притомъ положительное; то если мы подставимъ фальшивое частное, она сей часъ покажетъ поправку, которую въ немъ должно сдѣлать, т. е. она даетъ для t величину фальшивую, или отриц., по большей части дробную, или полож. но тоже дробную. Мы убавимъ или увеличимъ фальшивое частное на найденное число t, составимъ чрезъ него подход. дробь, снова подставимъ въ (17), и если въ другой, третій и проч. разы будемъ получать для t отриц. величины, или положит. но дробныя, столько разовъ сдѣлаемъ поправку въ фальшивомъ частномъ, до тѣхъ поръ, пока придемъ къ истинной величины его, отъ постановленія которой получимъ для t положит. цѣлое число съ дробью, что непремѣнно должно случиться.

Но если знаменатель Q_i второй дроби, съ которой хотимъ начать приложеніе (17), $=$ или > 2, приближеніе всегда будетъ вѣрно.

Въ нашемъ примѣрѣ отъ постановленія $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{2}{1}$, получили частное $q_3 = 6$.

Сыщемъ подходящія дроби

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 6 & \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{13}{7}. \end{array}$$

Подставимъ

$$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{13}{7}; \quad i = 3, \quad Q_{i-1} = 1;$$

$$f^\circ = \frac{83}{7^3}, \ M = 83$$

$$f' = \frac{227}{7^2}, \ N = 227$$

$$f'' = \frac{64}{7}, \ R = 64,$$

и получимъ

$$t' = -\frac{1}{7}\left(\frac{227}{83} - \frac{32}{227} + 1\right)$$

$$= -\frac{65078}{131887} = -\frac{1}{2 + \&.}$$

Такимъ образомъ нашли новую величину третьяго частнаго

$$q_3 = 6 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 6 - \frac{2}{1} = 4.$$

Поступивши точно также съ $q_3 = 4$, увидимъ, что оно есть истинное; но узнаемъ это послѣ двухъ подстановленій.

Напримѣръ Лежандръ даетъ для другаго корня, того же уравненія, слѣдующія частныя и подходящія дроби

Возмемъ еще на удачу

$$q_3 = 7$$

будетъ

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 7 & \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{15}{8}; \end{array}$$

$$i = 3;\quad Q_{i-1} = 1;\ f^{\circ} = \frac{517}{8^3},\ M = 517$$

$$f' = \frac{457}{8^2},\ N = 457$$

$$f'' = \frac{74}{8},\ R = 74.$$

Потомъ

$$t' = -\frac{1}{8}\left(\frac{457}{517} - \frac{37}{457} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \&.$$

и слѣд.

$$q_3 = 7 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 7 - 4 = 3.$$

Взявъ $q_3 = 3$, за новое частное, получимъ

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{7}{4};\ f^{o} = -\frac{13}{4^3},\ M = -13$$

$$f' = \frac{59}{4^2},\ N = 59$$

$$f'' = \frac{34}{4},\ R = 34.$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 20 & \\ \frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} & \frac{81}{182} \end{array} \quad \text{и проч.}$$

Взявъ $i = 2$, $Q_i = 2$, $Q_{i-1} = 1$, получимъ для (22)

$$-\frac{f''}{2f'} + \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}} = -\frac{2}{-29} + \frac{2}{-1} = -\tfrac{17}{18}.$$

Здѣсь оно съ первымъ членомъ, $\frac{f'}{f}$, имѣетъ разный знакъ, и притомъ $Q_i = 2$, то взявъ

$M = -1$, $N = -9$; $R = 2$, получимъ

Подставя въ (17), получимъ

$$t' = \frac{1}{4}\left(\frac{59}{13} + \frac{17}{59} - 1\right)$$

$$= \frac{2935}{3058}$$

Опять для t нашли тоже фальшивую величину, дробную, и будетъ искомое частное

$$q_3 = 3 + \frac{1}{\frac{2935}{3068}}$$

$$= 3 + \frac{3068}{2935}$$

или исключивъ цѣлое число

$$q_3 = 3 + \left(1 + \frac{133}{2935}\right) = 4.$$

Наконецъ подставя $q_3 = 4$, увѣрились бы, что оно истинное частное, тѣмъ, что для t нашли бы цѣлое и положительное число съ дробью какъ уже и видѣли.

И такъ говоря строго, форм. (17) всегда *можно* прилагать прямо къ второй подходящей дроби, какая бы она ни была, но не всегда *выгодно*.

$$t = \frac{1}{2}\left[\frac{-9}{-1} - \frac{2}{-2(9)} + \frac{1}{-1}\right] = 4\frac{1}{18},$$

откуда $q_3 = 4$.

Формула (19) даетъ

$$dx < \frac{1}{(2)^3} \cdot \frac{1}{(9)^2} \cdot \frac{1}{-\frac{2}{1}} < -\frac{1}{5832}$$

знаменатель подходящей дроби, на которой должно остановиться, будетъ (21)

$$Q_{i+\lambda} \text{ не } > \sqrt{5832}$$
$$\text{не } > 76.$$

И такъ должно остановиться на дроби

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{4}{9},$$

потому что слѣдующая

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{81}{182}.$$

Для другаго примѣра возмемъ уравненіе знаменитаго Ньютона

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

котораго корень Фурье вычислилъ до 32 десятичныхъ цыфръ (Analyse des equations determinées). Именно

$$x = 2,\ 09455148154232659148238654057930 \cdots\cdots$$

Мы легко найдемъ первыя два частныя $q_1 = 2$, $q_2 = 10$, и двѣ первыя подходящія дроби

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1},\quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{21}{10};$$

и какъ $Q_2 > 2$, то смѣло можемъ начать съ второй дроби.

Здѣсь

$$i = 2;\ f\left(\frac{21}{10}\right) = \frac{61}{(10)^3},\ M = 61$$

$$f'\left(\frac{21}{10}\right) = \frac{1123}{(10)^2},\ N = 1123$$

$$f''\left(\frac{21}{10}\right) = \frac{126}{10},\ R = 126.$$

Изъ (17)

$$t' = \frac{1}{10}\left(\frac{1123}{61} - \frac{126}{2246} - 1\right) = \frac{2577566}{1370060},$$

$$t = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \left(\cfrac{1}{10}\right)}}}}$$

посмотримъ, сколько изъ этихъ частныхъ принадлежатъ корню. Имѣя $Q_i = 10$, $Q_{i+1} = 11$, изъ (19) найдемъ

$$dx < \frac{1}{(10)^3} \cdot \frac{1}{(11)^2} \cdot \frac{126}{2246} < \frac{1}{2156873}.$$

Знаменатель послѣдней изъ подходящихъ дробей долженъ быть

$$Q_{i+\lambda} \text{ не } > \sqrt{2156873} \text{ не } > 1668.$$

Напишемъ всѣ подходящія дроби:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 10 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 10 & \\ \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{21}{10} & \frac{23}{11} & \frac{44}{21} & \frac{111}{53} & \frac{155}{74} & \frac{576}{275} & \left(\frac{5915}{2824}\right). \end{array}$$

И такъ мы должны остановиться на седмой подходящей дроби

$$\frac{P_7}{Q_7} = \frac{576}{275} = 2.0945\ldots\ldots$$

Погрѣшность (20)

$$\psi < \frac{1}{(275)^2} < 0.00001$$

Четыре десятичныя цыфры вѣрны. Подстановленіе начали со второй подходящей дроби, которая не давала ни одной десятичной цыфры. Приближеніе идетъ вчетверо.

Подставимъ теперь въ (17) $i = 7$.

$$f^{\circ} = -\frac{1399}{(275)^3},\ M = -1399$$

$$f' = \quad \frac{844078}{(275)^2},\ N = 844078$$

$$f'' = \quad \frac{3456}{275},\ R = 3456.$$

и

$$t' = \frac{-1}{275}\left(-\frac{844078}{1399} - \frac{3456}{1688156} + 74\right)$$

$$= \frac{1250172137056}{649475817100} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \&.}}}}$$

найдемъ

первый періодъ

$$x' = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}}}}}}}$$

второй періодъ.

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{1}\right)$$

подходящія дроби:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 10 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{21}{10} & \frac{23}{11} & \frac{44}{21} & \frac{111}{53} & \frac{155}{74} & \frac{576}{275} & \frac{731}{349} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 12 & 3 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ \frac{1307}{624} & \frac{16415}{7837} & \frac{50552}{24135} & \frac{269175}{128512} & \frac{319727}{152647} & \frac{588902}{281159} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 1 & 10 \\ \frac{1497531}{714965} & \frac{2086433}{996124} & \frac{14016129}{6691709} & \frac{16102562}{7687833} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \left(\frac{175041749}{83570039}\right). \end{array}$$

Изъ (19) имѣемъ

$$dx < -\frac{1}{(275)^3}\cdot\frac{1}{(349)^2}\cdot\frac{1728}{844078}$$

$$< \frac{1}{1218000000000000}.$$

Знаменатель (21) послѣдней подход. дроби будетъ

$$Q_{i-\lambda} \text{ не } > \sqrt{1218000000000000}$$

$$\text{не } > 34000000;$$

должно остановиться на 18 дроби

$$x' = \frac{P_{18}}{Q_{18}} = \frac{16102562}{7687833} = 2.09455148154232\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Въ первый пріемъ имѣли только четыре цыфры, а теперь четырнадцать. Легко разсчитать сколько получимъ цыфръ отъ постановленія послѣдней подходящей дроби $\frac{P_{18}}{Q_{18}}$ и т. д.

Вообще замѣтимъ, что при вычисленіи корней по этому способу, надобно въ (17) вмѣсто $\frac{f'}{f}$ и $\frac{f''}{2f'}$ подставить напередъ самыя функціи въ буквахъ, замѣнить x чрезъ $\frac{P_i}{Q_i}$, и сокративши, тогда уже подставлять вмѣсто P и Q ихъ численныя величины; иначе, при большихъ подстановленіяхъ, можно сдѣлать важныя ошибки, или покрайней мѣрѣ лишнія умноженія.

Такъ въ послѣднемъ примѣрѣ, имѣя

$$\begin{aligned} f^0 &= x^3 - 2x - 5 \\ f' &= 3x^2 - 2 \\ f'' &= 6x \end{aligned}$$

подставимъ въ (17) и получимъ

$$t' = \frac{(-1)^i}{Q_i^2}\left[\frac{3x^2-2}{x^3-2x-5} - \frac{6x}{2(3x^2-2)} + \frac{Q_iQ_{i-1}}{(-1)^{i-1}}\right]$$

или замѣня x чрезъ $\frac{P_i}{Q_i}$,

$$t' = \frac{(-1)^i}{Q_i^2}\left[\frac{(3P_i^2-2Q_i^2)Q_i}{P_i^3-2P_iQ_i^2-5Q_i^3} - \frac{3P_iQ_i}{3P_i^2-2Q_i}\right.$$
$$\left. + \frac{Q_iQ_{i-1}}{(-1)^{i+1}}\right]$$

наконецъ

$$t' = \frac{(-1)^i}{Q_i}\left[\frac{3P_i^2 - 2Q_i^2}{P_i^3 - 2P_iQ_i^2 - 5Q_i^3} - \frac{3P_i}{3P_i^2 - 2Q_i^2} + \frac{Q_{i-2}}{(-1)^{i+1}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

Это же самое выражено въ $(17)'$ посредствомъ M, N и R *).

Способы отдѣленія корней предложенные въ лекціяхъ IV., VII. и IX. открыты недавно. Прежде ихъ Геометры не имѣли ни какого правильнаго способа, кромѣ того, который предложенъ знаменитымъ авторомъ Аналитической Механики.

Этотъ способъ требуетъ составленія такъ называемаго уравненія „въ квадратахъ разностей"; сколько онъ остроуменъ и удовлетворителенъ по теоріи, столько же непроходимъ и труденъ въ практикѣ, даже для уравненій не высокихъ степеней. Поэтому, при нынѣшнихъ легкихъ способахъ не можетъ быть употребляемъ, и относится болѣе къ Исторіи Науки, чѣмъ къ самой Наукѣ. Мы разскажемъ его въ нѣсколькихъ словахъ.

Лагранжъ отыскиваетъ сперва положительные корни $f(x)$, потомъ перемѣнивъ въ ней x на $-x$, получаетъ новую функцію $f(-x)$; тоже ищетъ положительныхъ ея корней, которые будутъ отрицательными корнями прежней $f(x)$.

---

*) Время не позволило вполнѣ обработать эту статью, написанную при самомъ печатаніи, и развить ея другія любопытныя подробности. Но мы встрѣтимся еще съ нею въ Трансцендентномъ Анализѣ.

Прямо нельзя видѣть, какъ это сдѣлать: наприм. подставимъ вмѣсто x, 1, 2 и проч.; если $f(x)$ имѣетъ тотъ же знакъ, не можемъ заключить, что въ ней между этими предѣлами нѣтъ корней; также если она и перемѣнитъ знакъ отъ подстановленія двухъ цѣлыхъ чиселъ, — не можемъ сказать, что тутъ только одинъ корень. Этимъ путемъ тогда только могли бы отдѣлить корни, когда бы функція перемѣнила, отъ различныхъ подстановленій, свой знакъ столько разовъ, сколько единицъ въ степени уравненія; это самый частный случай, въ которомъ должны быть всѣ корни вещественные.

Но если бы мы знали наименьшую разность между корнями, тогда могли бы отдѣлить корни скоро; именно, пусть эта разность a; поставимъ вмѣсто x, a, $2a$, $3a\cdots\cdots$; между двумя смѣжными изъ этихъ предѣловъ, будетъ заключаться или одинъ корень, или ни одного, и уже теперь постоянство знака будетъ говорить, что между взятыми предѣлами нѣтъ корня. Между 0 и a можетъ быть или ни одного корня, или только одинъ.

Очень бы легко отдѣлить корни, еслибъ мы знали a. Но какъ найти a? — вотъ это требуетъ большихъ вычисленій и потому неудобно. Покажемъ какъ это дѣлается.

Пусть x_1 и x_2 два корня $f(x)$; разность ихъ $x_2 - x_1 = u$, то

$$x_2 = x_1 + u,$$

слѣдственно $f(x_1) = 0$ и $f(x_1 + u) = 0$,

или

$$f(x_1 + u) = f(x_1) + uf'(x_1) + \frac{u^2}{1.2}f''(x_1) + \ldots = 0 \ldots (A).$$

Между уравненіями

$$f(x_1) = 0 \text{ и } (A)$$

исключивъ x_1, получимъ уравненіе въ u, котораго степень будетъ $m(m-1)$, ежели m есть степень $f(x)$; потому что оно должно содержать разности m корней, всячески переставленныхъ по два. $F(u)$ будетъ содержать все четныя степени u, и потому положивъ $u^2 = z$, получимъ $F(z)$, которой степень будетъ $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

Ежели найдемъ наименьшій предѣлъ корня уравн. $F(z) = 0$, то задача рѣшена.

Если $f(x)$ будетъ 10 степени, то степень $F(z)$ будетъ $\frac{m(m-1)}{2} = \frac{10.9}{2} = 45$.

Одинъ трудъ, написать уравненіе 45 степени, уже невыносимъ. Коши объявилъ, что онъ нашелъ предѣлъ наименьшей разности корней, не составляя уравненія $F(z)$, но еще не обнародовалъ.

Самое превосходное отдѣленіе корней будетъ, какъ уже видѣли (лекц. IX.), когда способъ Фурье соединимъ съ непрерывными дробями; и тѣмъ болѣе, что здѣсь вмѣстѣ съ отдѣленіемъ, начинается и самое вычисленіе ихъ, по меньшей мѣрѣ до первыхъ десятичныхъ цыфръ.

ЛЕКЦІЯ XI.

Вычисленіе корней.

Линейное приближеніе.

Показавши способъ вычислять приближенную величину корней посредствомъ непрерывныхъ дробей, разсмотримъ теперь другой способъ, ведущій къ тому же, инымъ путемъ. Во многихъ случаяхъ онъ проще перваго (лекц. IX.); а въ соединеніи съ нимъ неоставляетъ ничего болѣе желать для вычисл. корней.

Ньютонъ первый предложилъ его; но въ томъ видѣ, — самъ знаменитый Авторъ это зналъ, — онъ былъ очень недостаточенъ; ни самъ Ньютонъ, ни другіе Геометры не могли исправить его. Лагранжъ считалъ исправленіе это труднымъ, даже невозможнымъ, и предложилъ свой способъ: мы уже знаемъ его. Фурье исправилъ всѣ недостатки и усовершенствовалъ способъ Ньютона такъ, что теперь онъ очень вѣренъ, оченъ простъ, и даетъ величину корня съ такимъ приближеніемъ, какъ угодно.

Разсмотримъ напередъ, въ чемъ состоитъ собственно способъ Ньютона, его недостатки и потомъ усовершенствованіи, въ немъ сдѣланныя Фурье. Ньютонъ требуетъ вопервыхъ: чтобы предѣлы a и b корня $f(x)$ были сближены между собою такъ, чтобъ разность ихъ была $< 0{,}1$:

$$b - a < 0{,}1.$$

Тогда пусть истинная величина корня

$$x = a + z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

будетъ

$$0 = f(a + z) = f(a) + zf'(a) + \frac{z^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots$$

по положенію $b - a < 0{,}1$, то уже подавно $z < 0{,}1$ и $z^2 < 0{,}01$, почему члены, содержащія z^2 и высшія степени можно пренебречь; и будетъ:

$$f(a) + zf'(a) = 0,$$

$$z = \frac{-f(a)}{f'(a)}.$$

Вставя въ (1), получимъ

$$x = a + \frac{-f(a)}{f'(a)} = a' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

Это по Ньютону первая приближенная величина корня. Съ этою величиною a' должно поступать такъ, какъ поступали съ a, и получимъ новую приближенную величину корня

$$x = a' + \frac{-f(a')}{f'(a')} = a''$$

Точно такое же дѣлаемъ приближеніе къ корню съ другаго предѣла b.

Хотя кажется здѣсь приближаемся къ корню, но можетъ случиться, что мы удалимся отъ него, перешагнувъ за прежнія предѣлы; это и есть главный недостатокъ Ньютонова способа. Другой, также не маловажный, состоитъ въ томъ, что когда станемъ въ самой вещи дѣлить $\frac{f(a)}{f'(a)}$, приводя, напримѣръ, въ десятичныя дроби, то не знаемъ сколько десятичныхъ цыфръ принадлежатъ корню, и сколько лишнихъ; поэтому принуждены были искать приближенныя величины корня съ обоихъ предѣловъ, и брать общія въ нихъ десятичныя цыфры, за цыфры принадлежащія корню. Это конечно справедливо, но утомительно. Эти-то два главные недостатка исправилъ Фурье. Не станемъ разсматривать неудовлетворительность Ньютонова способа во всѣхъ случаяхъ, довольно показать это для одного какого нибудь случая. Имѣемъ

$$0 = f(a + z) = f(a) + zf'(a + \theta z) \text{ (лекц. I.)}$$

$$z = \frac{-f(a)}{f'(a + \theta z)};$$

истинная величина корня

$$x = a + \frac{-f(a)}{f'(a + \theta z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ньютонъ не обращалъ вниманія на знаки производныхъ функцій; и такъ пусть случилось бы въ частномъ примѣрѣ:

$$\begin{array}{ll} & f(x) \\ (a) \cdots\cdots & - \\ (b) \cdots\cdots & +. \end{array}$$

Въ (3) мы не знаемъ ни θ, ни z, и приближаясь къ корню должны употребить (2). Ньютонъ предполагаетъ, что мы приближаемся къ корню слѣдовательно, a' ближе къ корню чѣмъ a; посмотримъ: между a и $a+\theta z$, $f'(x)$ можетъ имѣть корень, такъ что для $\quad f'(x)$

$(a)\cdots\cdots\cdots -$ или $f'(a)$ съ $-$;

$(a+\theta z)\cdots +$ или $f'(a+\theta z)$ съ $+$;

но по положенію $\quad f(x)$

$(a)\cdots\cdots -$ или $f(a)$ съ $-$;

то по формулѣ (2), приближенная величина корня будетъ $a'=a$ — нѣкоторая величина, т. е. меньше малаго предѣла; вотъ тутъ по способу Ньютона мы перешагнули за меньшій предѣлъ, отошли, а не приблизились къ корню. По формулѣ же (3) мы получимъ истинную величину корня $x = a +$ нѣкоторая величина.

Фурье исправилъ это; на недостатки Ньютонова способа навело его построеніе: пусть OA ось абциссъ, Oa меньшій предѣлъ корня, $=a$, $ac=f(a)$, $ob=b$, большій предѣлъ, $be=f(b)$, of корень $f(x)$ которую представляютъ ординаты кривой $cdfe$. Очевидно, что $\frac{-f(a)}{f'(a)}$ есть подкасательная ag въ точкѣ c и новый предѣлъ $a+\frac{-f(a)}{f'(a)}$ есть og, т. е. мы чрезъ это не приблизились къ корню, а отдалились отъ него; дѣлая теперь съ новою приближенною величиною og корня, тоже самое, т. е. проведя касательную hk, и взявъ приближенную величину Og вмѣстѣ съ подкасательною gk, получимъ величину ближе къ корню; но тутъ мы приближаемся такъ сказать ощупью.

Разсматривая подобнымъ образомъ предѣлъ b, видимъ, что приближенная величина корня $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$

будетъ od, потому что $\frac{f(b)}{f'(b)} = bd$; и такъ въ этомъ случаѣ приближенная величина перешла даже по другую сторону корня. Изъ этого видимъ, какія важныя недостатки и ошибки могутъ быть въ приближеніи корней по способу Ньютона; но отъ чего все это происходитъ? Фурье ясно видѣлъ, что причина всему этому зигзаки въ кривой; но зигзаки бываютъ тогда, когда кривая имѣетъ наибольшія и наименьшія ординаты, т. е. когда $f'(x)$ уничтожается; чтобъ небыло зигзаковъ, надобно чтобъ $f'(x)$ не уничтожалась, не имѣла ни одного корня между предѣлами a и b. И Фурье говоритъ: надобно до тѣхъ поръ сближать предѣлы корней, пока между этими предѣлами ни 1-я производная, ни 2-я, ни 3-я не станутъ уничтожаться: или, при подстановленіи въ нихъ предѣловъ a и b, дадутъ тѣже знаки; напримѣръ

$$f(x) = x^3 + 2x - 11$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2$$
$$f''(x) = 6x \quad f'''(x) = 6$$

	f	f'	f''	f'''
1	—	+	+	+
	1	0	0	0
2	+	+	+	+
	0	0	0	0
	1	0	0	0

Вотъ въ этомъ уравненіи предѣлы сближены такъ, какъ требуетъ Фурье, и значитъ, можемъ приступить къ приближенію. Но по Ньютону этаго сближенія недостаточно (разность между предѣлами еще

$>0{,}1$) и надлежало бы дѣлать еще нѣсколько лишнихъ подраздѣленій. И такъ вообще способъ, исправленный Фурье, требуетъ такихъ предѣловъ чтобъ строка разностей имѣла видъ $1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$. Ежели этого не будетъ для двухъ какихъ нибудь величинъ, должно подраздѣлять еще предѣлы пока достигнемъ; но мы ни когда недостигнемъ, ежели $f(x)$ въ одно время уничтожается съ $f''(x)$ или $f'''(x)$, т. е. имѣетъ съ ними общихъ множителей; съ $f'(x)$ въ одно время она исчезать не можетъ, потому что $f(x)$ не имѣетъ равныхъ корней по предположенію. И такъ прежде нежели приступимъ къ нахожденію ряда $1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$, надобно попробовать, не имѣетъ ли 2-я и 3-я производная общаго множителя съ начальною; ежели онъ есть, мы его найдемъ и тотчасъ получимъ корень; если нѣтъ, будемъ поступать по правилу сближенія предѣловъ. Положимъ, что мы достигли этаго ряда, который не есть частный случай, но общее свойство корней. (См. лекц. V. таб. 3 стр. 93.) Тутъ могутъ быть разные случаи, зависящіе отъ знаковъ, которые будутъ имѣть послѣ постановленія обоихъ предѣловъ a и b,

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x).$$

Возмемъ одинъ изъ этихъ случаевъ и разберемъ его въ подробности; что скажемъ объ немъ, тоже самое послѣ примѣнимъ и ко всѣмъ другимъ случаямъ *)

---

*) Ихъ четыре:

1-й случай.

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ldots - \ + \ + \ \pm \\ (b)\ldots + \ + \ + \ \pm\end{array}\right\}\ \text{(черт. } a\text{)}.$$

И такъ пусть

$$
\begin{array}{lcccccl}
 & f(x) & f'(x) & f''x) & f'''(x) & \cdots\cdots\cdots & \\
(a)\cdots\cdots & - & + & + & + & \text{далѣе какіе} & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{угодно знаки.} & \\
(b)\cdots\cdots & + & + & + & + & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0. & &
\end{array}
$$

Положимъ $x = a + z$, будетъ

$$o = f(a + z) = f(a) + zf'(a + \theta z)$$

$$z = -\frac{f(a)}{f'(a + \theta z)}$$

$$x = a + \frac{-f(a)}{f'(a + \theta z)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

$f(a)$ отрицательная, сталобыть $-f(a)$ положительная; $f'(a)$ и $f'(b)$ положительныя; но и $f''(x)$ тоже положительная между предѣлами a и b, значитъ $f'(x)$ между тѣми предѣлами увеличивается, такъ что

$$f'(a + \theta z) > f'(a),$$

слѣдовательно:

$$\frac{-f(a)}{f'(a + \theta z)} < \frac{-f(a)}{f'(a)}$$

2-й случай

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ldots - \; + \; - \; \pm \\ (b)\ldots + \; + \; - \; \pm \end{array}\right. \text{(черт. } b\text{).}$$

3-й случай

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ldots + \; - \; - \; \pm \\ (b)\ldots - \; - \; - \; \pm \end{array}\right. \text{(черт. } c\text{).}$$

4-й случай

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ldots + \; - \; + \; \pm \\ (b)\ldots - \; - \; + \; \pm \end{array}\right. \text{(черт. } d\text{).}$$

и приближенная величина корня по Ньютону (2)

$$\alpha' = a + \frac{-f(a)}{f'(a)}$$

будетъ больше корня x (4), т. е. предѣлъ α', которому слѣдуетъ быть малымъ, перейдетъ черезъ x и сдѣлается большимъ предѣломъ. Это же можно видѣть и по чертежу: $f(x)$ можетъ быть представлена кривою cgd, потому, что она изъ — переходитъ въ + и имѣетъ $f''(x)$ положительною, слѣдовательно обращается впалостію къ оси абциссъ. Проведя въ точкѣ c касательную, видимъ что $\frac{f(a)}{f'(a)} = ae$, и теперешній предѣлъ будетъ oe, т. е. больше корня og, изъ малаго сдѣлается большимъ, перейдетъ по другую сторону корня. И такъ способъ Ньютона и въ предположеніи, что 1-я, 2-я и 3-я производн. не имѣютъ корней между предѣлами, не точенъ, ведетъ къ ложнымъ выводамъ. Но Фурье замѣчаетъ: ежели вмѣсто $f'(a)$, возмемъ $f'(b)$, то, какъ мы уже замѣтили, что $f'(x)$ увеличивается между предѣлами a и b, будетъ

$$f'(b) > f'(a + \theta z) > f'(a)$$

$$\frac{-f(a)}{f'(a + \theta z)} > \frac{-f(a)}{f'(b)}$$

то

$$a + \frac{-f(a)}{f'(b)} < a + \frac{-f(a)}{f'(a + \theta z)} < a + z.$$

Вотъ эта новая приближенная величина корня

$$\alpha = a + \frac{-f(a)}{f'(b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

будетъ меньше корня $a + z$ и больше a; потому что $a =+$ нѣкотор. величина; значитъ, теперь мы точно приближаемся къ корню. До этихъ слѣдствій можемъ достигнуть не иначе, какъ предположивъ, что 1-я производная функція увеличивается, т. е. что 2-я имѣетъ знакъ $+$, или не имѣетъ корня между предѣлами; послѣ увидимъ для чего надобно, чтобъ и 3-я не имѣла корня между тѣми же предѣлами.

Теперь станемъ приближаться къ корню съ другаго предѣла b. Пусть $x = b - z'$.

$$0 = f(b - z') = f(b) - z'f'(b - \theta z'),$$

$$z' = \frac{f(b)}{f'(b - \theta z')};$$

истинная величина корня

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b - \theta z')};$$

но
$$f'(b) > f'(b - \theta z'),$$

то и $\frac{f(b)}{f'(b)} < \frac{f(b)}{f'(b - \theta z')}$; величины $\frac{f(b)}{f'(b)}$ и $\frac{f(b)}{f'(b - \theta z')}$ положительныя, слѣдовательно

$$\beta = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)'$$

будетъ больше корня x и меньше b. Вотъ съ этого предѣла и Ньютоновъ способъ вѣренъ: приближается къ корню; и такъ для одного предѣла Ньютоновъ способъ хорошъ, и именно для того, при которомъ $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинъ знакъ. Этоже видно на приложенныхъ чертежахъ. Но для другаго требуетъ измѣненія, сдѣланнаго Фурье.

Съ этими α и β, приближенными величинами корня, поступаемъ также, какъ съ a и b, находимъ новые, еще ближе.

$$\alpha' = \alpha + \frac{-f(\alpha)}{f(\beta)}$$

$$\beta' = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \text{ и т. д.}$$

Подобно этому случаю легко разберемъ и всѣ остальные, и мы это сдѣлаемъ въ концѣ статьи, а теперь, для того же случая посмотримъ, какъ узнать, до которой десятичной цыфры продолжать дѣленіе, чтобъ имѣть цыфры, дѣйствительно принадлежащія корню и небрать лишнихъ.

Во первыхъ видимъ, что если въ α и β произведемъ въ самой вещи дѣленіе дробей

$$\frac{f(a)}{f'(b)}, \quad \frac{f(b)}{f'(b)},$$

то сколько въ обѣихъ частныхъ будетъ одинаковыхъ цыфръ, столько ихъ принадлежитъ корню; остальныя надо бросить; мы тутъ можетъ быть отбрасываемъ нѣкоторыя изъ цыфръ, принадлежащихъ корню, но за то не дѣлаемъ ошибки, не беремъ цыфръ, во все, можетъ быть, не принадлежащихъ ему.

Если приближеніе требуется до большаго числа десятичныхъ, наприм. до 10, 20 и болѣе, то чтобъ находить цыфры, принадлежащія корню, должно приближаться съ обоихъ предѣловъ, производя непосредственное дѣленіе, и брать одинаковыя цыфры въ обѣихъ приближенныхъ величинахъ, за цыфры, принадлежащія корню. Тогда это дѣленіе, неизбѣжное въ каждомъ новомъ сближеніи предѣловъ, будетъ до чрезвычайности утомительно.

Мы покажемъ способъ, прямо узнавать, до которой десятичной продолжать дѣленіе, чтобъ имѣть цыфры точно принадлежащія корню.

Пусть $$b - a = \Delta$$

$$\beta - \alpha = \Delta', \text{ то } a = b - \Delta.$$

Поставивъ въ (5) вмѣсто a его величину, получимъ

$$\alpha = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = b - \Delta - \frac{f(b-\Delta)}{f'(b)}$$

но

$$f(b-\Delta) = f(b) - \Delta f'(b) + \frac{\Delta^2}{2} f''(b - \lambda\,\Delta) \text{ (лекц. I.)}.$$

слѣдовательно

$$\alpha = b - \Delta - \frac{f(b)}{f'(b)} + \Delta - \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(b-\lambda\Delta)}{f'(b)}$$

$$= b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(b-\lambda\Delta)}{f''(b)} = \beta - \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(b-\lambda\Delta)}{f'(b)}$$

откуда

$$\Delta' = \beta - \alpha = \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(b-\lambda\Delta)}{f'(b)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Эта формула тотчасъ покажетъ, до какой десятичной простирать дѣленіе, чтобъ не взять лишнихъ цыфръ непринадлежащихъ корню. Мы предположили, что $f'''(x)$ между предѣлами a и b неимѣетъ корня *) и притомъ она съ $+$; сталобыть $f''(x)$ при увеличивающемся x увеличивается, такъ что

*) Вотъ теперь видимъ, для чего нужно чтобъ и f''' неимѣла корня между a и b.

$$f''(b-\lambda\Delta) < f''(b),$$

поэтому
$$\frac{f''(b-\lambda\Delta)}{f'(b)} < \frac{f''(b)}{f'(b)};$$

слѣдовательно
$$\Delta' < \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(b)}{f'(b)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Подставя въ (7) вмѣсто b его численную величину, положимъ, что нашли

$$\frac{f''(b)}{2f'(b)} = 0{,}4$$

въ тоже время положимъ, что разность между первыми предѣлами

$$\Delta = b - a = 0{,}001$$

будетъ
$$\Delta' < (0{,}001)^2 \cdot 0{,}4.$$

Замѣня 0,4, для простоты вычисленія, единицей высшаго порядка, т. е. 1, получимъ Δ' и подавно меньше $(0{,}001)^2 \cdot 1$; или

$$\Delta' < 0{,}000001,$$

т. е. предѣлы α и β будутъ разниться въ 6-й цыфрѣ меньше чѣмъ на 1; пять цыфръ можно взять какъ вѣрныя принадлежащія корню.
Мы можетъ быть отбросимъ истинную цыфру, принадлежащую корню, но покрайнѣй мѣрѣ будемъ ручаться, что пять первыхъ цыфръ точно принадлежатъ корню.

Взявъ найденные 6 цыфръ, попробуемъ какой знакъ имѣетъ $f(x)$ для этой величины, если тотже, что и для предшествовавшаго большаго предѣла, то это будетъ новый большій предѣлъ; убавя 6-ю цыфру единицею получимъ новый меньшій; или ежели эти 6 цыфръ даютъ $f(x)$ знакъ меньшаго предѣла, т. е.

будутъ новымъ меньшимъ предѣломъ, то прибавя единицу къ 6-й цыфрѣ, получимъ большій.

Съ новыми предѣлами поступимъ также: продолжая до тѣхъ поръ, пока получимъ корень съ желаемымъ числомъ десятичныхъ цыфръ.

При вычисленіи приближенной величины корня бываетъ надобность, очень большое число дѣлить на очень большое; при условіи, до сколькихъ десятичныхъ должно получить частное, производя дѣленіе по обыкновенному правилу, употребимъ много лишней работы, и потому Фурье предложилъ другой пріемъ дѣленія, который весьма облегчаетъ работу тѣмъ, что нетребуетъ помноженія каждой цыфры частнаго на всѣ цыфры дѣлителя, или онъ можетъ доставлять искомые знаки частнаго, имѣя только нѣсколько первыхъ знаковъ дѣлимаго и дѣлителя.

Пусть требуется раздѣлить

234567819

на 354721353

съ тѣмъ, чтобъ имѣть въ частномъ 4 десятичныя цыфры.

Для этого возмемъ въ дѣлителѣ нѣсколько знаковъ, наприм. три, т. е. 354. На это число раздѣлимъ первые 4 знака, 2345, дѣлимаго, получимъ въ частномъ 6. Вычтя изъ 2345 произведеніе $354 \cdot 6 = 2124$, въ остаткѣ будемъ имѣть 221; къ этому остатку сношу слѣдующій за числомъ 2345 знакъ 6, и изъ этихъ 2216 вычту произведеніе 6 на 7, т. е. 1-й знакъ частнаго числа, умноженный на 4-й знакъ дѣлителя. Исправленный остатокъ 2174 раздѣлимъ на 354, получимъ въ частномъ 6, вторую цыфру частнаго, которою умножа 354 и вычтя это произведеніе, 2124, изъ 2164 найдемъ остатокъ 50, къ нему сношу слѣдующую цыфру дѣлимаго 7, будетъ 507, этотъ остатокъ должно уменьшить произведеніемъ перваго частнаго числа на 5-й знакъ дѣлителя, вмѣстѣ съ произведеніемъ 2-го частнаго числа на 4-й знакъ дѣлителя, т. е. надобно изъ 507 вычесть: $6 \cdot 2 + 6 \cdot 7 = 54$, получится остатокъ 453; съ нимъ поступать также какъ съ остаткомъ 2174, и продолжать подобнымъ образомъ далѣе до тѣхъ поръ, пока получимъ въ частномъ столько цыфръ десятичныхъ, сколько нужно. Очевидно, что здѣсь тоже самое дѣлается, что и въ обыкновенномъ способѣ дѣленій, только въ отличномъ нѣсколько порядкѣ. Такимъ образомъ дѣйствіе, нами описанное, представится въ слѣдующемъ видѣ:

	234567819	354721353
	2124	0,6612
	2216	
$6.7 =$	42	
	2174	
	2124	
	507	
$6.2 + 6.7 =$	54	
	453	
	354	
	998	
$6.1 + 6.2 + 1.7 =$	25	
	973	
	708.	

Для легкости дѣленія, даже могли бы взять въ дѣлителѣ не три знака 354, но только два: 35, и поступая также, достигнули бы тогоже.

Способъ, нами излагаемый, безпрестанно требуетъ численныхъ величинъ f^{o}, f', f'', $f'''\cdots$ для каждыхъ предѣловъ новаго приближенія. Утомительно было бы всякой разъ, для полученія этихъ функцій, вставлять каждый предѣлъ снова во весь рядъ ихъ.

Слѣдующій пріемъ много облегчитъ работу, особенно при большихъ степеняхъ: нужно только однажды имѣть численныя величины f^{o}, f', f'', $f'''\cdots$ для какого нибудь предѣла a, чтобъ очень просто вывести изъ нихъ численныя величины для другаго предѣла a', когда разность $a'-a$ извѣстна.

Дѣйствительно, пусть даны численныя величины

$$f(a) \quad f'(a) \quad f''(a) \quad f'''(a)\cdots\cdots$$

найти

$$f(a') \quad f'(a') \quad f''(a') \quad f'''(a')\cdots\cdots$$

$a'-a=h$ тоже дано: будетъ $a'=a+h$;

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots$$

$$f'(a+h)=f'(a)+hf''(a)+\frac{h^2}{2}f'''(a)+\ldots$$

$$f''(a+h)=f''(a)+hf''''(a)+\frac{h^2}{2}f^{IV}(a)+\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Стоитъ только вникнуть въ составъ этихъ строкъ, опредѣляющихъ

$$f(a+h),\ f'(a+h),\ f''(a+h)\cdots\cdots$$

чтобы понять то упрощеніе, которое мы намѣрены предложить.

Напишемъ численныя величины

$$f(a) \quad f'(a) \quad f''(a) \quad f'''(a)\cdots\cdots$$

въ строку, и будемъ помножать, начиная съ лѣвой руки со 2-го члена на h, и ставить произведенiе 2-го члена на h подъ первымъ членомъ 1-й строки; 3-го, подъ 2-мъ и т. д.; съ этою новою строкою поступимъ точно также какъ съ предшедшею, помножая уже не на h, а на $\frac{h}{2}$, начиная опять со 2-го члена, и ставя произведенiе подъ 1-мъ членомъ, получимъ 3-ю строку. Для полученiя четвертой, надо помножить 3-ю на $\frac{h}{3}$, начиная съ второго члена и ставя произведенiе отъ него, все подъ первымъ. Сумма всѣхъ первыхъ членовъ этихъ строкъ очевидно будетъ $f(a+h)$, вторыхъ $f'(a+h)$, третьихъ $f''(a+h)$...

Дѣйствительно

$f(a)$	$f'(a)$,	$f''(a)$,	$f'''(a)$.	$f^{\text{IV}}(a)$	1.	данная	строка
$hf'(a)$,	$hf''(a)$,	$hf'''(a)$,	$hf^{\text{IV}}(a)$		2.	„	„
$\frac{h^2}{2}f''(a)$,	$\frac{h^2}{2}f'''(a)$,	$\frac{h^2}{2}f^{\text{IV}}(a)$, ...			3.	„	„
$\frac{h^3}{2.3}f'''(a)$,	$\frac{h^3}{2.3}f^{\text{IV}}(a)$,	....	......		4.	„	„
$\frac{h^4}{2.3.4}f^{\text{IV}}(a)$	.......,	....	......		5.	„	„
$f(a+h)$,	$f'(a+h)$,	$f''(a+h)$,	$f'''(a+h)$.				

Примѣръ.

Пусть

$$f(x) = x^3 + 2x - 11$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$x = 1 = a \quad a' = 1{,}1 \quad h = 0{,}1.$$

$$
\begin{array}{llll}
& f(a) = -8 \quad & f'(a) = 5 \quad & f''(a) = 6 \quad f'''(a) = 6 \\
h & = 0,1 \ldots\ldots 0,5 & 0,6 & 0,6 \\
\frac{h}{2} & = 0,05 \ldots\ldots 0,03 & 0,03 & \\
\frac{h}{3} & = 0,033 \ldots\ldots 0,001 & & \\
\hline
& f(a') = -8,469 & f'(a') = 5,63 & f''(a') = 6,6 \quad f'''(a') = 6.
\end{array}
$$

ЛЕКЦІЯ XII.

Линейное приближеніе.

(Продолженіе.)

Показавши эти пріемы дѣленія и вычисленія производныхъ функцій, облегчающіе работу, воротимся опять къ формулѣ (7), которая дастъ намъ отношеніе между Δ' и Δ, разностями новыхъ и прежнихъ предѣловъ, и покажетъ степень новаго приближенія. Въ самой вещи, имѣя

$$\Delta' < \Delta^2 \frac{f''(b)}{2f'(b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

въ каждомъ частномъ случаѣ найдемъ Δ и $\frac{f''(b)}{2f'(b)}$ въ числахъ, замѣнимъ эти числа единицами высшаго порядка, такъ что если наприм. $\Delta = 0 \cdot 47$, то мы замѣнимъ его 1; вмѣсто $\frac{f''(b)}{2f'(b)} = 2.47$, поставимъ 10.

Вообще единицу всякаго порядка можно выразить такъ:

$$\left(\tfrac{1}{10}\right)^p \text{ или } (0\cdot1)_p$$

когда $p=0;\ (0\cdot1)^p=1$

$$p=1;\ (0\cdot1)^p=0\cdot1$$

$$p=2;\ (0\cdot1)^p=0\cdot01$$

$$p=3;\ (0\cdot1)^p=0\cdot001 \text{ и т. д.}$$

Это единицы дробныя разныхъ порядковъ. Цѣлыя единицы получимъ такъ

когда $p=-1;$ то $(0\cdot1)^p=\left(\tfrac{1}{10}\right)^{-1}=10$

$$p=-2;\quad (0\cdot1)^p=\left(\tfrac{1}{10}\right)^{-2}=100$$

$$p=-3;\quad (0\cdot1)^p=\left(\tfrac{1}{10}\right)^{-3}=1000.$$

и т. д.

И такъ положимъ

$$\Delta=(0.1)^q;\ \frac{f''(b)}{2f'(b)}=(0.1)^p$$

будетъ по (7)

$$\Delta'<[(0\cdot1)^{2q}\cdot(0\cdot1)^p=(0\cdot1)^{2q+p}]\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(8)$$

приближенiе будетъ тогда успѣшное, когда порядокъ Δ' будетъ хотя единицею болѣе порядка Δ; а для этого нужно

$$2q+p>q\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(9)$$

или $$q>-p.$$

Въ самой вещи (7) можно написать такъ:

$$\Delta'<\frac{(0.1)^{2q}}{(0.1)^{-p}},$$

ежели $q=-p$, то

$$\Delta'<[(0\cdot1)^q=\Delta],$$

т. е. Δ' и Δ будутъ одного порядка, и приближеніе ничего не выиграетъ; напротивъ оно будетъ еще удаляться когда

$$q < -p.$$

Это значитъ, что предѣлы α и β не довольно еще сближены; и въ новую величину корня не прибудетъ ни одинъ десятичный знакъ.

Пояснимъ это примѣромъ надъ уравненіемъ, которое уже брали въ концѣ лекціи IX.

$$x^3 + 2x - 11, \quad 3x^2 + 2, \quad 6x, \quad 6,$$

видѣли, что между предѣлами 1 и 2, строка разностей

$$1, \ 0, \ 0, \ 0$$

удовлетворяетъ нашимъ условіямъ, т. е. ни первая, ни вторая, ни третья производная функція между тѣми предѣлами не имѣютъ корней; иначе нельзя бы дѣлать приближенія.

Начнемъ съ того предѣла, для котораго $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинаковый знакъ, какъ здѣсь, $+$.

Найдемъ численныя величины всѣхъ функцій для обоихъ предѣловъ

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
(1).....	-8	5	6	6
(2).....	1	14	12	6,

подставимъ

$$\beta = b - z = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2 - \tfrac{1}{14} = 2 - 0.0714\ldots\ldots$$

но еще не знаемъ на которой цыфрѣ остановиться. Возмемъ изъ (7)

$$\Delta' < \Delta^2 \frac{f''(b)}{2f'(b)};$$

$$\varDelta = 2 - 1 = 1 = (0 \cdot 1)^{\circ}; \text{ и } q = 0;$$

$$\frac{f''(b)}{2f'(b)} = \tfrac{12}{23} = 0.4.$$

Замѣня единицею высшаго порядка, имѣемъ

$$\frac{f''(b)}{2f'(b)} = (0.1)^{\circ} = 1; \text{ и } p = 0.$$

Но и $q = 0$, сталобыть здѣсь $2q + p = p$, условіе (9) неудовлетворяется: приближенія начинать нельзя, не сблизивъ тѣснѣе предѣлы.

И такъ возмемъ

$$b' = b - h, \text{ и } h = -0{\cdot}1, \text{ и } b' = 2 - 0{\cdot}1 = 1{\cdot}9$$

вмѣсто того, чтобъ подставлять эту новую величину во всѣ производныя функціи, употребимъ показанный выше пріемъ.

	0.	I.	II.	III.
$x = 2$	1	14	12	6
$h = -0.1$	-1.4	-1.2	-0.6	
$\frac{h}{2} = -\frac{0.1}{2}$	0.06	0.03		
$\frac{h}{3} = -\frac{0.1}{3}$	-0.001			
$x = 1.9$	-0.341	12.83	11.4	6
$x = 2$	$+1$	14	12	6

Искомый корень дѣйствительно заключенъ между этими предѣлами. Здѣсь $\frac{f''(b)}{2f'(b)} = \frac{12}{28}$ или $1 = (0{,}1)^{\circ}$,

$$p = 0; \quad \varDelta = 2 - 1 \cdot 9 = (0 \cdot 1)^{1}; \quad q = 1$$

$$2q + p > q$$

разность между новыми предѣлами

$$\varDelta' < (0 \cdot 1)^{2q+p} < (0 \cdot 1)^{2} < 0 \cdot 01.$$

Дѣленіе можно продолжать до второй десятичной цыфры, т. е.

$$b' = b - z = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2 - \tfrac{1}{14} = 2 - 0.07\ldots = 1.93\ldots.$$

Эта величина больше корня.

Еслибы не пренебрегая цыфрами, идущими за $0 \cdot 07 \ldots$ замѣнили ихъ единицею высшаго порядка и взяли $0 \cdot 08$, то сдѣлавъ

$$3 - 0 \cdot 08 = 1 \cdot 92,$$

мы можетъ быть перешагнули черезъ корень, и отсюда получимъ два предѣла близкія

$$1 \cdot 93 \text{ и } 1 \cdot 92,$$

а если не перешагнемъ, то предѣлы будутъ

$$1 \cdot 92 \text{ и } 1 \cdot 91.$$

Чтобъ узнать это, подставимъ $x = 1 \cdot 92$, гдѣ $h = 0 \cdot 02$. И такъ

$x = 1.9$	-0.341	12.83	11.4	6
$h = 0.02$	0.2566	0.288	0.12	
$\frac{h}{2} = 0.01$	0.00228	0.0012		
$\frac{h}{3} = \frac{0.02}{3}$	0.000004			
$x = 1.92\ldots$	-0.082116	$13 \cdot 0592$	11.52	$6.$

Здѣсь $f(1 \cdot 92)$ имѣетъ тотже знакъ, что и $f(1 \cdot 9)$; сталобыть черезъ корень перешагнули: онъ заключается между $1 \cdot 93$ и $1 \cdot 92$. И такъ

$$a = 1\cdot 92,\ b = 1\cdot 93$$

и $$h = 0\cdot 01.$$

	f	f'	f''	f'''
$x = 1.92$	-0.082116	13.0592	11.52	6
$h = 0.01$	$0\cdot 130592$	$0\cdot 1152$		
$\frac{h}{2} = \frac{0.01}{2}$	0.00057			
$x = 1\cdot 93$	$+0\cdot 049053$	13.1747	$11\cdot 52$	$6.$

Возмемъ формулу (7) и приложимъ ее къ новымъ предѣламъ $1\cdot 92$ и $1\cdot 93$

$$\Delta' < \Delta^2 \frac{f''(b)}{2f'(b)}.$$

Здѣсь

$$\frac{f''(b)}{2f'(b)} = \frac{11.58}{2 \times 13.1747} \text{ или } 1 = (0\cdot 1)^0,\ p = 0;$$

$$\Delta = 1\cdot 93 - 1\cdot 92 = 0\cdot 01 = (0\cdot 1)^2,\ q = 2.$$

$2q + p > p$, (9) удовлетворяется,

то $$\Delta' < (0\cdot 1)^{2q+p} < (0\cdot 1)^4 < 0\cdot 0001.$$

Дѣленіе можемъ продолжать до четвертой десятичной включительно. Приближенная величина корня будетъ разниться отъ истинной менѣе 1 въ четвертой десятичной цыфрѣ.

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1\cdot 93 - \frac{0\cdot 049053}{13\cdot 1747}.$$

При дѣленіи такихъ большихъ чиселъ употребимъ способъ выше показанный.

$$\begin{array}{r|l} 49053 & 13.1747 \\ 39 & \overline{0.0037} \\ \overline{100} & \\ 3\times1=\quad 3 & \\ \overline{97} & \\ 91. & \end{array}$$

Дальше продолжать не нужно.

Новая приближенная величина корня будетъ

$$b' = 1\cdot93 - 0\cdot0037 = 1\cdot9263.$$

Эта величина больше истиннаго корня.

Если бы не пренебрегая слѣдующими цыфрами дѣленія, замѣнили ихъ единицею высшаго порядка, взявъ

$$\frac{f(b)}{2f'(b)} = 0\cdot0038,$$

тогда $$b' = 1\cdot9262.$$

Надо удостовѣриться, перешагнули или неперешагнули мы черезъ корень. Для этаго найдемъ численную величину $f(x)$ для $x = 1\cdot9262$

$$h = -0\cdot0038$$

		f	f'	f''	f'''
$x =$	$1\cdot93$	$+0\cdot049053$	$13\cdot1747$	$-11\cdot58$	6
$h =$	-0.0038	-0.05006383	0.05006396	$0\cdot228$	
$\frac{h}{2} =$	$-0\cdot0019$	$+0\cdot0000836076,$	0.0004332		
$\frac{h}{3} =$	$-0\cdot0012$	-0.0000005192			
$x =$	1.9262	$-0\cdot0009271722$	$15\cdot131129$	11.352	6

Ясно, что перешагнули за корень; сталобыть новые предѣлы его:

$$a' = 1 \cdot 9262, \quad b' = 1 \cdot 9263.$$

Чтобъ получить всѣ функціи для $x = 1 \cdot 9263$, имѣемъ $h = + 0 \cdot 0001$

$x =$	1.9262	-0.0009271722	13.131129	11.352	6
$h =$	$+ 0.0001$	0.0013131129	0.0011352	0.0006	
$\frac{h}{2} =$	$+ \frac{0.0001}{2}$	0.0000000567	0.00000003		
$\frac{h}{3} =$		$0.000 \ldots\ldots.$			
$x =$	1.9263	$+0.0003859974$	13.13226423	11.3526	6

Здѣсь

$$b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')} = 1.9263 - \frac{0.0003859974}{13.132264230}.$$

Посмотримъ до какой цыфры производить дѣленіе. Имѣя

$$\frac{f''(b')}{2f'(b')} = \frac{11 \cdot 35 \ldots\ldots}{2(13 \cdot 132 \ldots)} \text{ или } (0.1)^0, \text{ т. е. } p = 0;$$

$$\Delta = 1 \cdot 9263 - 1 \cdot 9262 = 0 \cdot 0001 = (0 \cdot 1)^4, \; q = 4;$$

$$q + p > p,$$

$$\Delta' < (0 \cdot 1)^8 = 0 \cdot 00000001;$$

дѣленіе можемъ продолжать до осьмой цыфры включительно. Раздѣливъ въ самой вещи будетъ:

$$b'' = 1 \cdot 9263 - 0 \cdot 00002939 = 1 \cdot 92627061.$$

Здѣсь 7 цыфръ принадлежатъ корню, потому что они общія для обоихъ предѣловъ.

Чтобъ получить еще десятичные знаки для корня, примемъ цыфры, оставленныя при дѣленіи, за единицу высшаго порядка, такъ:

$$\frac{f(b')}{f'(b')} = 0{,}00002940,$$

тогда $b'' = 1\cdot9236 - 0\cdot00002940 = 1\cdot92627060.$

Надо теперь узнать, мы перешагнули черезъ корень или нѣтъ, для этаго найдемъ численную величину $f(x)$ и ея производныхъ при $x = 1\cdot92627060$

$$h = -\,0\cdot00002940$$

	f	f'	f''	f'''
$x =$ 1.9263......	0.0003859974	13.13226423	11.3526	6
$h =$ —0.00002940...	—0.0003860886	—0.00033218	—0.0018	
$\frac{h}{2} =$ —0.00001470...	+0.0000000049	+0.00000003		
$\frac{h}{3} =$ —0.00000980...	—0.0000000000000003			
$x =$ 1.92627060...	—0.0000000863	13.13193049	11.3508	6.

Ясно что этотъ предѣлъ меньше корня, т. е. мы перешагнули черезъ корень; предѣлы будутъ:

$$a'' = 1\cdot92627060 \text{ и } b'' = 1\cdot92627061.$$

	f	f'	f''	f'''
$x =$ 1.92627060	—0.0000000863	13.13193049	11.3508	6
$h =$ 0.00000001	+0.0000001313193	0.000000113508	0.00000006	
$\frac{h}{2} =$ 0.000000005				
$x =$ 1.92627061...	+0.0000000450193	13.131930603508	11.3508	6

$$b''' = 1.92627061 - \frac{0.000000450193}{13.131930603508}.$$

Чтобъ узнать до какой цыфры производить дѣленіе имѣемъ: $\Delta = 0\cdot00000001 = (0\cdot1)^8$, $q = 8$

$$\frac{f''(b'')}{2f'(b'')} = \frac{11.3508}{2(13\cdot131932)} \text{ или } (0.1)^0,\ p = 0$$

$$2q + p > p$$

$$\Delta' < [(0\cdot1)^{16} = 0\cdot0000000000000001].$$

Дѣленіе можно продолжать до 16-й цыфры, гдѣ въ самомъ дѣлѣ получимъ

$$b''' = 1\cdot92627061 - 0\cdot0000000034282327$$

$$= 1\cdot9262706065717673$$

15 цыфръ десятичныхъ принадлежатъ корню.

Еслибы захотѣли продолжать дальше, получили бы слѣдующее приближеніе въ 32, потомъ въ 64 и т. д. десятичныхъ цыфръ.

При небольшомъ навыкѣ способъ этотъ чрезвычайно простъ.

Замѣтимъ, что если, передъ этимъ, дѣлая приближеніе до четырехъ цыфръ, продолжимъ дѣленіе до 5-й цыфры, то получимъ

$$\frac{f(b)}{f'(b)} = 0.00372,$$

$$b' = 1\cdot93 - 0\cdot00372 = 1\cdot92628$$

вѣрно съ послѣднею величиною до 4-й цыфры включительно. И такъ въ выраженіи

$$\Delta' < \Delta^2 \frac{f''(b)}{2f'(b)}$$

замѣняя числа единицами высшаго порядка, мы въ большей части случаевъ теряемъ одну истинную десятичную цыфру, но за то имѣемъ ту выгоду, что ни когда не ошибемся и не возмемъ ни одной цыфры, не принадлежащей корню.

Пусть еще для примѣра уравненіе, надъ которымъ знаменитый Ньютонъ объяснилъ свой способъ.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Именно:} & x^3 - 2x - 5, & 3x^2 - 2, & 6x, & 6 \\
(2)\cdots\cdots\cdots & -1, & +10, & +12, & +6 \\
(3)\cdots\cdots\cdots & +16, & +25, & +18, & +6 \\
\hline
& 1 & 0 & 0 & 0,
\end{array}$$

строка разностей согласна съ требованіемъ.

Посмотримъ сперва, достаточно ли сближены предѣлы, чтобъ начинать приближеніе

$$\Delta = 1 = (0 \cdot 1)^0, \text{ т. е. } q = 0$$

$$\frac{f''(b)}{2f'(b)} = \tfrac{18}{50}, \text{ или } 1 = (0,1)^0,\ p = 0.$$

И такъ приближеніе отъ этихъ предѣловъ нельзя начинать: Ньютонъ справедливо требовалъ чтобъ разность предѣловъ была меньше $0 \cdot 1$. Сблизимъ предѣлы по способу непрерывныхъ дробей. Пусть

$$x = 2 + \tfrac{1}{y}.$$

Подставя въ предложенное уравненіе, получимъ преобразованное

$$F(y) = y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = y^2(y - 10) - 6y - 1$$

Здѣсь съ перваго взгляда видно, что всѣ числа отъ 0 до 10 даютъ $F(y) = -$; при $y = 11$, $F(11) = +$: корень заключается между 10 и 11; взявъ

$$x = 2 + \tfrac{1}{10} = 2 \cdot 1,$$

получимъ величину больше корня, который по этому заключается между 2 и $2 \cdot 1$; $\varDelta < 0 \cdot 1$, можно начинать приближеніе. Имѣя

$x = 2$	-1	10	12	6
$h = 0.1$	1.0	1.2	0.6	
$\frac{h}{2} = \frac{0.1}{2}$	0.06	0.03		
$\frac{h}{3} = \frac{0.1}{3}$	0.001			
(2.1).......	$+0.061$	11.23	12.6	6.

Посмотримъ до которой цыфры продолжать дѣленіе:

$$\frac{f''(b)}{2f'(b)} = \frac{12.6}{22.46} \text{ или } 1 = (0 \cdot 1)^0,\ p = 0,$$

$$\varDelta = 0 \cdot 1 = (0 \cdot 1)^1;\quad q = 1;$$

$$\varDelta' < (0 \cdot 1)^{2q+p} < (0 \cdot 1)^2;$$

слѣдовательно до двухъ цыфръ. Начнемъ отъ большаго предѣла $2 \cdot 1$, потому что для него $f(b)$ и $f''(b)$ съ одинаковымъ знакомъ, будетъ

$$b' = b - z = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2.1 - \frac{0.061}{11.23}$$

Сдѣлавъ въ самой вещи, получимъ

$$b' = 2.1 - 0.005 = 2.09 \cdots$$

Разсмотримъ теперь другіе случаи знаковъ. Положимъ, что $f(x)$, отъ постановленія вмѣсто x двухъ предѣловъ a и b, даетъ слѣдующія строки знаковъ:

$$\begin{array}{llllll} a) & - & + & - & + & \text{далѣе какіе нибудь} \\ & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ b) & + & + & - & + & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & 2 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0. & \end{array}$$

Строка разностей удовлетворяетъ условію. Приближеніе начать можно. Здѣсь

$f(a)$ отрицательная,

$f(b)$ положительная,

$f(\alpha) = 0$, гдѣ α корень,

$f'(a)$ и $f'(b)$ положительныя,

$f'(x)$ съ увеличеніемъ x между a и b уменьшается, потому что $f''(x)$ между этими предѣлами имѣетъ знакъ —; поэтому $f'(a) > f'(b)$.

$f''(a)$ и $f''(b)$ обѣ отрицательныя.

$f''(x)$ между a и b увеличивается,

т. е. $f''(a) < f''(b)$.

Здѣсь по способу Ньютона приближеніе начинать должно съ малаго предѣла a, потому что $f(a)$ и $f''(a)$ обѣ съ одинаковымъ знакомъ. Формула (3) даетъ

$$x = a + \frac{-f(a)}{f'(a+\theta z)} = a + \frac{f(a)}{f'(a+\theta z)}.$$

Но $f'(a) > f'(a+\theta z)$, то

$$\frac{f(a)}{f'(a+\theta z)} > \frac{f(a)}{f'(a)};$$

слѣдовательно

$$a' = a + \frac{f(a)}{f'(a)}$$

будетъ величина больше a и меньше корня x, такъ что не перейдемъ черезъ предѣлъ a, и приблизимся къ корню; и такъ дѣйствительно приближеніе надо здѣсь начать отъ малаго предѣла.

Чтобъ узнать, до сколькихъ десятичныхъ продолжать дѣленіе, въ теперешнемъ случаѣ, т. е. приближаясь съ малаго предѣла, вмѣсто формулы (6) должно употребить слѣдующую

$$\Delta' = \Delta^2 \frac{f''(a+\lambda\Delta)}{2f'(b)}.$$

Дѣйствительно, приближаясь отъ предѣла a, будетъ

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)} = a + \Delta - \frac{f(a+\Delta)}{f'(a)}$$

$$f(a+\Delta) = f(a) + \Delta f'(a) + \frac{\Delta^2}{2} f''(a+\lambda\Delta)$$

$$b' = a + \Delta - \frac{f(a)}{f'(a)} - \Delta - \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(a+\lambda\Delta)}{f'(a)}$$

$$= a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(a+\lambda\Delta)}{f'(a)}$$

откуда

$$b' = a' - \frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(a+\lambda\Delta)}{f'(a)}$$

$$\Delta' = b' - a' = -\frac{\Delta^2}{2}\,\frac{f''(a+\lambda\Delta)}{f'(a)} \ldots\ldots\ldots (10).$$

Теперь мы можемъ найти до сколькихъ десятичныхъ должно продолжать дѣленіе; въ самомъ дѣлѣ мы уже сказали, что

$$f''(a) < f''(a+\lambda\Delta) < f''(b),$$

то

$$\frac{f''(a+\lambda\Delta)}{2f'(a)} < \frac{f''(b)}{2f'(a)}$$

и

$$\Delta' < \Delta^2 \frac{f''(b)}{2f'(a)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

исправленная формула (7).

Пояснимъ это примѣромъ.

$$\begin{aligned} f\,(x) &= x^3 - 4x^2 + 8x - 2 \\ f'\,(x) &= 3x^2 - 8x + 8 \\ f''(x) &= 6x - 8 \\ f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcccc} (0) & \cdots & - & + & - & + \\ (1) & \cdots & + & + & - & + \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Строка разностей удовлетворяетъ условію: приближеніе начать можно; для $x = 0$, $f(x)$ и $f''(x)$ обѣ съ —; приближеніе должно начать съ малаго предѣла.

Но напередъ сблизимъ предѣлы по способу непрерывныхъ дробей.

Пусть $x = \frac{1}{y}$ будетъ

$$F(y) = 2y^3 - 8y^2 + 4y - 1 = y^2(2y - 8) + 4y - 1$$

$$\begin{array}{r|l} y = 3 & - \\ y = 4 & +. \end{array}$$

Пусть $y = 3 + \frac{1}{z}$, найдемъ

$$\varphi(z) = 7z^3 - 10z^2 - 10z - 2 = z^2(7z - 10) - 10z - 2$$

$$\begin{array}{r|l} z = 2 & - \\ z = 3 & +. \end{array}$$

Пусть $z = 2 + \frac{1}{u}$, получимъ

$$\psi(u) = 6u^3 - 34u^2 - 32u - 7 = u^2(6u - 34) - 32u - 7$$

$$\begin{array}{r|l} u = 6 & - \\ u = 7 & +. \end{array}$$

Пусть $u = 6 + \frac{1}{t}$, будетъ

$$\begin{aligned} \chi(t) &= 127t^3 - 208t^2 - 74t - 6 \\ &= t^2(127t - 208) - 74t - 6. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} t = 1 & - \\ t = 2 & +. \end{array}$$

Положивъ $t = 1 + \frac{1}{s}$, будетъ

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= 161s^3 + 183s^2 - 173s - 127 \\ &= s^2(161s + 183) - 173s - 127 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} s = 0 & - \\ s = 1 & + \end{array}$$

и $s = \frac{1}{\theta}$, гдѣ

$$\lambda(\theta) = 127\theta^3 + 173\theta^2 - 183\theta - 161$$

$$\begin{array}{c|c} \theta = 1 & - \\ \theta = 2 & +. \end{array}$$

Теперь имѣемъ

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}} = \tfrac{13}{45} = 0{,}288$$

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = \tfrac{2}{7} = 0{,}285.$$

Ежелибы взяли еще два частныя, получили бы

$$a = 0 \cdot 287$$
$$b = 0 \cdot 288.$$

Сыщемъ теперь численныя величины всѣхъ функцій, для обоихъ предѣловъ.

$x = 0$	-2	8	-8	6
$+h = 0 \cdot 288$	$2{,}304$	$-2 \cdot 304$	2.128	
$+\frac{h}{2} = 0.144$	-0.331776	0.306432		
$+\frac{h}{3} = 0.097$	$+0.029417472$			
$b = 0 \cdot 288$	$+0.001641472$	6.602432	-5.872	6
$h = -0 \cdot 001$	-0.006602432	$+0 \cdot 005872$	$-0 \cdot 006$	
$\frac{h}{2} = -\frac{0.001}{2}$	$-0 \cdot 000002936$	$+0.000003$		
$\frac{h}{3} = -\frac{0 \cdot 001}{3}$	$-0 \cdot 000000001$			
$a = 0 \cdot 287$	$-0 \cdot 004963897$	$6 \cdot 608307$	$-5{,}878$	$6.$

И такъ для формулы $\frac{f''(b)}{2f'(b)} = \frac{5.872}{2(6.608\ldots)}$ или принимая это за единицу высшаго порядка, т. е. 1, будеть $1 = (0{,}1)^0$, $p = 0$

$$\Delta = 0{,}001 = (0{,}1)^3; \quad q = 3$$

$$\Delta' < (0{,}1)^{2+qp} < (0{,}1)^6.$$

Дѣленіе можемъ продолжать до 6-й цыфры.

$$a' = a + \frac{-f(a)}{f'(a)}$$

$$= 0{,}287 + \frac{0{,}004963897}{6{,}608306}.$$

И такъ приближенная величина корня:

$$a' = 0{,}287753 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Сдѣлавъ новое подстановленіе во всѣ функціи, для новыхъ предѣловъ, нашли бы величину корня въ двенадцати десятичныхъ знакахъ.

Мы не станемъ больше подробно разсматривать другихъ случаевъ, гдѣ строки знаковъ удовлетворяющія условію строки разностей

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0,$$

будутъ отличаться отъ тѣхъ, какія до сихъ поръ разсматривали. Всякой легко самъ увидитъ, отъ какого предѣла начинать приближеніе, какую формулу взять, (7) или (10) и какія измѣненія въ нихъ сдѣлать.

Напримѣръ въ случаѣ

$$\begin{array}{lccccc}
x = a \cdots\cdots & - & + & + & - & + \\
 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
x = b \cdots\cdots & + & + & + & - & + \\
 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.
\end{array}$$

Ньютоново приближеніе надо начинать съ большаго предѣла b, потому что $f(b)$ и $f''(b)$ имѣютъ для него тотже знакъ. Для узнанія до сколькихъ десятич. продолжать дѣленіе, должно взять формулу (7) и въ ней сдѣлать слѣдующее измѣненіе. Такъ какъ $f''(x)$ съ увеличеніемъ x уменьшается, потому что $f'''(x)$ съ —; то $\quad f''(b) < f''(b - \lambda\Delta) < f''(a)$

$$\frac{f''(b-\lambda\Delta)}{2f'(b)} < \frac{f''(a)}{2f'(b)};$$

$$\Delta' = \Delta^2 \frac{f''(b-\lambda\Delta)}{2f'(b)},$$

и
$$\Delta' < \Delta^2 \frac{f''(a)}{2f'(b)},$$

покажетъ, какъ далеко продолжать дѣленіе, чтобъ получить десятичныя, принадлежащія корню.

Этимъ окончимъ линейное приближеніе и займемся приближеніемъ втораго порядка.

ЛЕКЦІЯ XIII.

Приближеніе втораго порядка.

Въ линейномъ приближеніи, развернувши $f(a+y)$ въ рядъ, мы бросали всѣ члены, въ которыхъ степени y выше первой; очевидно, что вычисленіе корней будетъ гораздо успѣшнѣе, если въ разложеніи $f(a+y)$ оставимъ члены, нетолько съ первою, но и съ второю степенью y, бросивъ третью и высшія его степени, по малости ихъ въ сравненіи съ тѣми.

Этотъ новый родъ приближенія, для отличія отъ перваго, называемъ „приближеніемъ втораго порядка."

Напишемъ данную функцію и всѣ ея производныя

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\cdots\cdots f^n(x).$$

Пусть a и b два предѣла, между которыми заключается корень $f(x)$, такіе, что между ими, первая, вторая, третья и даже четвертая производныя, неимѣютъ ни одного корня; иначе, будемъ ихъ сближать пока выполнится это условіе, всегда возможное.

I. И такъ, отъ постановленія a и b получили двѣ строки знаковъ

$$\begin{array}{lccccccc} & 0 & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & & & \\ (a)\cdots\cdots & - & + & + & + & + & \cdots\cdots & + \\ (b)\cdots\cdots & + & + & + & + & + & \cdots\cdots & + \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0; & & \end{array}$$

другіе случаи разсмотримъ послѣ.

Здѣсь $f(a)$ отрицательная, съ увеличеніемъ a, увеличивается, потому что $f'(a)$ съ $+$; $f'(a)$ и $f''(a)$ тоже увеличиваются.

Напротивъ $f(b)$, $f'(b)$ и $f''(b)$ отъ b къ a, т. е. съ уменьшеніемъ b, уменьшаются.

Пусть истинная величина корня $f(x)$

$$x = a + y;$$

къ малому предѣлу надо прибавить y положительное; будетъ

$$0 = f(a+y) = f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2}f''(a) + \frac{y^3}{2.3}f'''(a+\theta y) \ldots f(x).$$

Послѣдній членъ положительный; если мы бросимъ его, вторая часть $f(x)$ уменьшится, и получимъ неравенство

$$f(x) > f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2}f''(a);$$

слѣд. $$f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2}f''(a) < 0 \ldots \mathrm{F}(y),$$

когда $\quad y = 0,\ f(x)$ и $F(y)$ обѣ $= f(a)$,

обѣ отрицательныя; когда y отъ нуля начнетъ увеличиваться, $f(x)$ прежде сдѣлается $= 0$, чѣмъ $F(y)$, т. е. чтобъ сдѣлать

$$F(y) = 0,$$

y понадобится больше настоящаго *); слѣдств. если

$$F(y) = \frac{f''a}{2}y^2 + f'(a)y + f(a) = 0$$

рѣшимъ по y, и получимъ

$$y = \frac{-f'(a) \pm \sqrt{(f'a)^2 - 2faf''a}}{f''(a)},$$

то дадимъ y величину *больше* настоящей. Въ тоже время $f(a)$ и $f''(a)$ съ противными знаками, то произведеніе, $2faf''a$ отрицательное и

$$\sqrt{(f'(a))^2 - 2faf''a} = \sqrt{(f'a)^2 + (2faf''a)},$$

то когда радикалъ возмемъ съ $+$,

$$a + y$$

---

*) Или можемъ такъ разсуждать: въ разложеніи

$$0 = f(a + y) = f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2}f''(a) + \frac{y^3}{2.3}f'''(a + \theta y)$$

съ увеличеніемъ y, вторая часть увеличивается, потому что f' съ $+$, если бросимъ послѣдній членъ, мы уменьшимъ вторую часть, то чтобъ вознаградить уменьшеніе второй части и сохранить прежнее равенство съ нулемъ, надобно увеличить y, т. е. $F(y) = 0$

даетъ y больше настоящаго.

перешагнетъ за корень; если радикалъ возмемъ съ —, y будетъ отрицательный, уменьшитъ малый предѣлъ a, и новый корень переступитъ за малый предѣлъ. Чтоже надо сдѣлать? Вмѣсто $f''(a)$ напишемъ $f''(b)$, и какъ f'' отъ a къ b увеличивается или $f''(b) > f''(a + \theta' y)$, то изъ

$$f(x) = f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2} f''(a + \theta' y)$$

получимъ

$$f(a) + f'(a)y + \frac{f''(b)}{2} y^2 > 0 \ldots \varphi(y).$$

Когда $y = 0$, $f(x)$ и $\varphi(y)$ обращаются обѣ въ $f(a)$, отрицательную; когда y отъ нуля начнетъ увеличичиваться, $\varphi(y)$ прежде сдѣлается $= 0$, чѣмъ $f(x)$, т. е. при меньшемъ y; и такъ, сдѣлавъ

$$\varphi(y) = \frac{f''(b)}{2} y^2 + f'(a)y + f(a) = 0$$

получимъ

$$y = \frac{-f'(a) \pm \sqrt{(f'a)^2 - 2faf''b}}{f''b} \ldots (y)$$

меньше настоящаго; и какъ $\sqrt{(f'a)^2 + (2faf''b)} > f'(a)$, то взявъ радикалъ съ +, найдемъ для y величину положительную, меньше настоящей; и придавъ ее къ малому предѣлу, будетъ

$$a < a + y < x;$$

новый корень $a + y$, между малымъ предѣломъ a и настоящимъ корнемъ x: приблизимся къ нему.

Начнемъ теперь отъ большаго предѣла b. Здѣсь fb и $f''b$ съ одинаковымъ знакомъ.

Пусть $$x = b - z,$$
будетъ

$$0 = f(b-z) = f(b) - zf'(b) + \frac{z^2}{2}f''(b) - \frac{z^3}{2.3}f'''(b-\theta z) \ldots\ldots f(x)$$

и потомъ неравенство:

$$f(b) - zf'(b) + \frac{z^2}{2}f''(b) > 0 \ldots \mathrm{F}(z).$$

Если бросимъ послѣдній отрицательный членъ, вторая часть $f(x)$ увеличится и сдѣлается $= \mathrm{F}(z)$; и какъ въ этомъ разложеніи съ увеличеніемъ z, $f(b-z)$ уменьшается, то изъ уравненія

$$\mathrm{F}(z) = \frac{f''b}{2}z^2 - f'b + f(b) = 0$$

получимъ z больше настоящаго, именно:

$$z = \frac{f'(b) - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b}}{f''b} \ldots (z).$$

Напротивъ

$$z = \frac{f('b) - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''a}}{f''a} \ldots\ldots (z)',$$

будетъ меньше настоящаго; и какъ здѣсь fb и $f''b$ обѣ съ $+$, то

$$\sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b} < f'b,$$

и потому z будетъ положительное, съ какимъ бы знакомъ радикалъ ни взяли. Но не обѣ величины z для насъ выгодны. Въ формулѣ (z) или $(z)'$ мы должны взять радикалъ съ тѣмъ знакомъ, который приведетъ къ линейному приближенію; а это будетъ, когда возмемъ съ —.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ $F(z)$ коэфиціентъ при z^2 сдѣлаемъ $=0$, тогда одинъ изъ корней будетъ $z=\infty$ *), а другой, какъ въ линейномъ приближеніи,

$$z=\frac{fb}{f'b};$$

туже величину для z получимъ изъ (z), когда радикалъ возмемъ съ —; именно:

$$\sqrt{(f'b)^2-2fbf''b}=f'b\left[1-\frac{2fbf''b}{(f'b)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=f'b\left[1-\frac{fbf''b}{(f'b)^2}-\frac{(fb)^2(f''b)^2}{(f'b)^4}-\&\right];$$

подставя въ (z), получимъ

$$z=\frac{f'b-f'b+\dfrac{f(b)f'(b)f''(b)}{(f'b)^2}+\dfrac{(fb)^2\,(f'b)'\,(f''b)^2}{(f'b)^4}}{f''b}$$

$$=\frac{fb}{f'b}+\left[\frac{(fb^2}{(f'b)^3}+\&\right]f''b;$$

когда сдѣлаемъ $f''(b)=0$, то

---

*) Не худо здѣсь припомнить извѣстное изъ элементарныхъ курсовъ: если въ уравненіи

$$Axn+Bxn-1+Cxn-2+\ldots+Kx^2+Lx+M=0\ldots(x)$$

сдѣлаемъ $x=\frac{1}{y}$, получимъ

$$A+By+Cy^2+\ldots+Kyn-2+Lyn-1+Myn=0\ldots(y);$$

и когда $A=0$, то одинъ изъ корней (y) будетъ $y=0$, и слѣдств. $x=\frac{1}{0}$. Когда $A=0$ и $B=0$, то въ уравненіи (x) будутъ два корня $x=\infty$ и т. д.

Остальные найдутся.

$$z = \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Но какъ выгоду линейнаго приближенія мы уже видѣли, то тѣмъ еще болѣе выгодно приближеніе втораго порядка, но только тогда, когда сдѣлаемъ его по *неисправленнымъ* формуламъ (y) и (z), отъ которыхъ: $a + y$ переходитъ за корень и становится большимъ предѣломъ, и $b - z$, тоже переходя за корень, дѣлается малымъ предѣломъ; эти предѣлы гораздо ближе между собою, чѣмъ по исправленнымъ формуламъ $(y)'$ и $(z)'$: тутъ почти не выгоднѣе линейнаго, особливо вначалѣ.

Разсмотримъ теперь другіе случаи:

2) Когда имѣемъ строки

	0	I.	II.	III.			
(a)	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	....	$+$
(b)	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	....	$+$
	1	0	0	0	0		

то взявъ отъ большаго предѣла

$$0 = f(b - z) = f(b) - zf'b + \frac{z^2}{2}f''b - \frac{z^3}{2.3}f'''(b - \theta z)\ldots f(x),$$

получимъ $$fb - zf'b + \frac{z^2}{2}f''b < [f(x) = 0] \ldots\ldots F(z).$$

$F(z) = 0$ даетъ z меньше настоящей величины; отъ малаго предѣла здѣсь надобно взять

$$f(a) + yf'a + \frac{y^2}{2}f''(a) > 0 \ldots \varphi(y);$$

изъ $F(z) = 0$ и $\varphi(y) = 0$, получимъ

$$y = \frac{-f'a + \sqrt{(f')^2 - 2faf''a}}{f''a}\ldots(y).$$

$$z = \frac{f'(b) - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b}}{f''b} \dots\dots (z).$$

	0	I.	II.	III.		
(a)	+	—	+	+	+	+
(b)	—	—	+	+	+	+
	1	0	0	0	0.	

Здѣсь отъ предѣла a,

$$fa + yf'a + \frac{y^2}{2}f''a < 0 \dots . F(y);$$

и $F(y) = 0$, дасть y меньше настоящаго;

отъ предѣла b надобно взять

$$fb - zf'b + \frac{z^2}{2}f''b > 0 \dots . \varphi(z),$$

изъ $F(y)$ и $\varphi(z) = 0$, получимъ

$$y = \frac{-f'(a) + \sqrt{(f'a)^2 - 2faf''a}}{f''a};$$

радикалъ взяли съ $+$, потому что только онъ ведетъ къ линейному приближенію.

$$z = \frac{f'b - \sqrt{(f'b^2 - 2fbf''b.}}{f''b}$$

		0	I.	II.	III.		
4.	(a)	+	—	+	—	+	+
	(b)	—	—	+	—	+	+
		1	0	0	0		

Когда возмемъ

$$fa + yf'a + \frac{y^2}{2}f[f''b < (x) = 0] \dots . F(y);$$

то изъ $F(y) = 0$, получимъ y меньше настоящей; и взявъ радикалъ съ $+$, найдемъ

$$y = \frac{-f'(a) + \sqrt{(f'a)^2 - faf''b}}{f''b}$$

5. Если отъ постановленія въ рядъ производныхъ функцій двухъ чиселъ a и b, получимъ строки

$$\begin{array}{lccccccc} & 0 & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & & & \\ (a) \cdots\cdots & - & + & - & + & + & \cdots\cdots & + \\ (b) \cdots\cdots & + & + & - & + & + & \cdots\cdots & + \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0, & & \end{array}$$

то разсуждая какъ въ первомъ случаѣ, найдемъ

$$0 = f(a + y) = fa + yf'a + \frac{y^2}{2}f''a + \frac{y^3}{2.3}f'''(a + \theta y) \ldots f(x);$$

и

$$f(a) + yf'a + \frac{y^2}{2}f''b > 0 \ldots F(y);$$

сдѣлавъ $F(y) = 0$, получимъ

$$y = \frac{-f'a + \sqrt{(f'a)^2 - 2faf''b}}{f''b}.$$

$$\begin{array}{llccccccc} & & 0 & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & & & \\ 6. & (a) \cdots\cdots & - & + & + & - & + & \cdots\cdots & + \\ & (b) \cdots\cdots & + & + & + & - & + & \cdots\cdots & + \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

Здѣсь надо взять

$$f(b) - zf'(b) + \frac{z^2}{2}f''b < 0,$$

$$z = \frac{f'b - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b}}{f'(b)}.$$

		0	I.	II.	III.		
7.	(a)	+	—	—	+	+	+
	(b)	—	—	—	+	+	+

Получимъ тоже

$$z = \frac{f'b - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b}}{f''b}.$$

Наконецъ

8.	(a)	+	—	—	—	+	+
	(b)	—	—	—	—	+	+

найдемъ

$$z = \frac{f'b - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''a}}{f''a}.$$

И такъ по приближенію втораго порядка можно вычислять корни съ выгодою только отъ одного предѣла, потому что въ большей части разсмотренныхъ случаевъ, отъ другаго предѣла, величина, вычисленная по *неисправленной* формулѣ, непереходитъ за корень; а если бы захотѣли вычислять отъ обоихъ предѣловъ по *исправленнымъ* формуламъ, и удовольствоваться общими ихъ цифрами, то не получили бы ни какой выгоды предъ линейн. приближеніемъ, особливо вначалѣ; но вычисленіе было бы гораздо сложнѣе; слѣд. здѣсь еще необходимѣе найти такую же простую формулу, какъ въ линейномъ приближеніи формула (7), посредствомъ которой могли бы узнавать, до какой десятичной продолжать дѣленіе и извлеченіе радикала.

Но этого ни Фурье, ни другой кто изъ Геометровъ до сихъ поръ не изслѣдовалъ, и потому-то приближеніе втораго порядка, не смотря на видимое преимущество передъ линейнымъ, оставалось безъ употребленія.

Формулу ту можно найти слѣдующимъ образомъ:

Пусть разность между прежними предѣлами

$$b - a = \Delta \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1);$$

новые предѣлы беремъ отъ *неисправленныхъ* формулъ:

$$\text{большой } b' = a + y, \quad \text{малый } a' = b - z.$$

Сдѣлаемъ $$\Delta' = a + y - (b - z).$$

Требуется найти отношеніе между Δ' и Δ такое, которое тотчасъ бы показывало степень приближенія a' и b'; сначала для 1-го случая; къ остальнымъ легко будетъ примѣнить.

Изъ (1) взявъ $a = b - \Delta$, и поставя въ

$$a + y = a + \frac{-f'a + \sqrt{f'(a)^2 - 2faf''a}}{f''a}$$

получимъ

$$a + y = (b - \Delta) +$$

$$\frac{-f'(b-\Delta) + \sqrt{[f'(b-\Delta)]^2 - 2f(b-\Delta)f''(b-\Delta)}}{f''b} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)^*.$$

Въ приближеніи 2-го порядка условились вообще

---

*) Г. Остроградскій во время лекціи, написавши формулу (2), не продолжалъ далѣе; а замѣтивъ, что по разложеніи всѣхъ членовъ ея въ ряды, можно, чрезъ удачное преобразованіе и сокращеніе, вывести искомую зависимость между Δ' и Δ,

отбрасывать Δ^3, и потому въ разложеніяхъ подъ радикаломъ не станемъ писать его; будетъ

$$f(b-\Delta)=fb-\Delta f'b+\frac{\Delta^2}{1.2}f''b-\&$$

$$f'(b-\Delta)=f'b-\Delta f''b+\frac{\Delta^2}{1.2}f'''b-\&$$

$$f''(b-\Delta)=f''b-\Delta f'''b+\frac{\Delta^2}{1.2}f^{\text{IV}}b-\&,$$

и пропуская букву b подъ знаками f, f' и проч., получимъ

$$[f'(b-\Delta)]^2=(f')^2+\Delta^2 f''^2-2\Delta f'f''+\Delta^2 f'f'''-\Delta^3(\ldots)$$

$$2f(b-\Delta)f''(b-\Delta)=2ff''-2\Delta f'f''+\Delta^2 f''^2-2\Delta ff'''$$
$$+2\Delta^2 f'f'''+\Delta^2 ff^{\text{IV}}-\Delta^3(\ldots\ldots).$$

Вычитая второе изъ перваго, найдемъ

$$\sqrt{[f'(b-\Delta)]^2-2f(b-\Delta)f''(b-\Delta)}$$

$$=\sqrt{\begin{matrix}(f')^2+\Delta^2(f'')^2-2\Delta f'f''+\Delta^2 f'f'''-\Delta^3(\ldots.)\\ -2ff''-\Delta^2(f'')^2+2\Delta f'f''-2\Delta^2 f'f'''+2\Delta ff'''\\ -\Delta^2 ff^{\text{IV}}+\Delta^3(\ldots.)\end{matrix}}$$

$$=\sqrt{(f')^2-2ff''-\Delta^2 f'f'''+\Delta ff'''-\Delta^2 ff^{\text{IV}}}$$

$$=\sqrt{(f')^2-2ff''}\left[1-\frac{\Delta^2 f'f'''-2\Delta ff'''}{(f')^2-2ff''}-\frac{\Delta^2 ff^{\text{IV}}}{(f')^2-2ff''}\right]^{\frac{1}{2}},$$

предложилъ слушателямъ самимъ заняться этимъ изысканіемъ. Мы сочли за нужное, не оставлять вопроса не конченнымъ, и выведя формулу (3) пояснили примѣромъ, изъ котораго ясно усматривается превосходство приближенія втораго порядка передъ линейнымъ. *С. Б.*

$$= \sqrt{(f')^2 - 2ff''}\left\{1 - \frac{\Delta^2}{2} f''' \cdot \frac{f' - \frac{2f}{\Delta}}{(f')^2 - 2ff''} - \frac{\Delta^2 ff^{\mathrm{iv}}}{2[(f')^2 - 2ff'']}\right\}$$

$$= \sqrt{(f')^2 - 2ff''} - \frac{\Delta^2 f'''}{2} \cdot \frac{f' - \frac{2f}{\Delta}}{\sqrt{(f')^2 - 2ff''}} - \frac{\Delta^2 ff^{\mathrm{iv}}}{2\sqrt{(f')^2 - 2ff''}}$$

Разсмотримъ послѣдніе два члена: сдѣлавъ коэфиціентъ втораго члена равнымъ 1, т. е.

$$\frac{f' - \frac{2f}{\Delta}}{\sqrt{(f')^2 - 2ff''}} = 1,$$

получили бы $\Delta = \frac{f' - \sqrt{f' - 2ff''}}{f''} = z.$

Но какъ Δ всегда больше z, то весь членъ

$$\frac{\Delta^2 f'''}{2} \cdot \frac{f' - \frac{2f}{\Delta}}{\sqrt{(f')^2 - 2ff''}} < \frac{\Delta^2}{2} \cdot f'''.$$

Ежели вмѣсто того, чтобъ этотъ членъ вычитать, придадимъ его къ второй части уравненія, то она сдѣлается больше первой. Коэфиціентъ третьго члена

$$\frac{f}{2\sqrt{(f')^2 - 2ff''}} < \Delta,$$

слѣдств. весь членъ тотъ $< \Delta^3 f^{\mathrm{iv}}$, и его можно бросить: это еще увеличитъ вторую часть; и будетъ неравенство

$$\sqrt{[f'(b-\Delta)]^2 - 2f(b-\Delta)f''(b-\Delta)} < \sqrt{(f')^2 - ff''} + \frac{\Delta^2 f'''}{2}.$$

Поставивъ его въ (2), и тамъ увеличимъ числителя второй части, такъ что

$$a + y < (b - \Delta)$$

$$+ \frac{-\left(f' - \Delta f'' + \frac{\Delta^2}{2} f''' - \frac{\Delta^3}{2.3} f^{\mathrm{IV}}\right) + \sqrt{(f')^2 - 2ff'' + \frac{\Delta^2}{2} f'''}}{f''a}.$$

Чѣмъ меньше Δ, тѣмъ $f''a$ ближе къ равенству $f''b$; если замѣнимъ одну другою, то приближеніе 2-го порядка можно будетъ начинать съ такого Δ, при которомъ не перемѣнится послѣднее неравенство, отъ увеличенія знаменателя, и тогда будетъ

$$a + y < b +$$

$$\frac{-f' - \Delta f'' + \Delta f'' - \frac{\Delta^2}{2} f''' + \frac{\Delta^3}{2.3} f^{\mathrm{IV}} + \sqrt{(f')^2 - 2ff'' + \frac{\Delta^2}{2} f''}}{f''}$$

или примѣчая, что

$$-z = \frac{-f' + \sqrt{(f')^2 - 2ff''}}{f''},$$

найдемъ

$$a + y < b - z + \frac{\Delta^3}{1.2.3} \frac{f^{\mathrm{IV}}}{f''};$$

откуда

$$a + y - (b - z) < \frac{\Delta^3}{1.2.3} \cdot \frac{f^{\mathrm{IV}}}{f''};$$

наконецъ

$$\Delta' < \frac{\Delta^3}{1.2.3} \cdot \frac{f^{\mathrm{IV}}b}{f''b} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Пусть $\Delta = (0 \cdot 1)^p$

$$\frac{f^{\mathrm{IV}}}{6f''} = (0.1)^q$$

то $\Delta' < (0 \cdot 1)^{3p+q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$

Приближеніе втораго порядка тогда только можно начинать, когда

$$3p + q > p$$

или
$$2p + q > 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5).$$

Если этого нѣтъ, значитъ предѣлы недовольно еще сближены.

Формула (3) показываетъ, что приближеніе пойдетъ здѣсь гораздо успѣшнѣе линейнаго, потому что при каждомъ новомъ вычисленіи, число десятичныхъ цифръ, подходящихъ къ корню, будетъ возрастать въ прогрессіи

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81 \quad \text{и т. д.}$$

Пояснимъ это примѣромъ: возмемъ функцію, которой корни мы уже отдѣлили (лекц. IX.)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x + 2 \\ f' &= 4x^3 - 18x^2 + 12x + 9 \\ f'' &= 12x^2 - 36x + 12 \\ f''' &= 24x - 36 \\ f^{\text{IV}} &= 24. \end{aligned}$$

Одинъ изъ ея корней заключенъ между предѣлами 3·5 и 3·6; получимъ

	0	I.	II.	III.	IV.
	—0·1875	2	33	48	24
(3·5)····	—	+	+	+	+
	+0·18564	5·546	38	50·4	24
(3·6)····	+	+	+	+	+.

Вопросъ относится къ первому случаю положительныхъ корней.

Посмотримъ сперва, можно ли тутъ начинать „линейное приближеніе.“

Поставя въ формулу (7) (лекц. IX.)

$$\Delta' < \Delta^2 \cdot \frac{f''b}{2f'b},$$

$$\Delta = (0.1)^1 ; \frac{f''b}{2f'b} = \frac{28}{11.092} = 3.4 = (0.1)^{-1}$$

получимъ $\Delta' < (0 \cdot 1)^2 (0 \cdot 1)^{-1} < (0 \cdot 1)$.

И такъ для линейнаго приближенія слѣдовало бы еще подраздѣлять предѣлы.

Попробуемъ теперь формулу (3)

$$\Delta' < \Delta^3 \cdot \frac{f^{IV}b}{6f''b}.$$

Здѣсь $\Delta = (0 \cdot 1)^1$; $\frac{f^{IV}}{6f''b} = \frac{24}{228} = 0.104$. Или замѣня единицею высшаго порядка

$$\frac{f^{IV}}{f''} = (0.1)^0.$$

$p = 1$; $q = 0$; $2p > 0$, (5); приближеніе имѣетъ мѣсто:

$$\Delta' < (0 \cdot 1)^3 < 0 \cdot 001.$$

Вотъ уже первая выгода приближенія втораго порядка, что для него нѣтъ нужды такъ много сближать предѣлы корней.

Если вычислимъ y по формулѣ (y)

$$y = \frac{-f'a + \sqrt{(f'a)^2 - 2faf''a}}{f''a},$$

отъ которой, видѣли, $a + y$ переходитъ за корень; получимъ

$$y = 0 \cdot 062, \quad a' = a + y = 3 \cdot 562.;$$

это долженъ быть большой новый предѣлъ.

Если вычислимъ z по формулѣ (z)

$$z = \frac{f'b - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b}}{f''b}$$

получимъ для новаго малаго предѣла

$$z = \frac{1.463}{37.92} = 0.0385$$

$$x = b - z = 3 \cdot 6 - 0{,}0385 = 3 \cdot 5615 \ ^*).$$

И такъ y дѣйствительно перешло за корень; его величина $x = 3 \cdot 562$, должна разниться отъ истиннаго корня меньше 0,001, т. е. малый новый предѣлъ долженъ быть $3 \cdot 561$, и мы видимъ что это такъ.

Ежели вычислимъ y по исправленной формулѣ $(y)'$

$$y = \frac{-f'a + \sqrt{(f'a)^2 - 2faf''b}}{f''b}$$

получимъ $y = 0 \cdot 059$

$$a' = a + y = 3 \cdot 559.$$

Эта величина разнится отъ истинной $> 0{,}002$.

Ежели вычислимъ z по формулѣ $(z)'$

$$z = \frac{f'b - \sqrt{(f'a)^2 - 2fbf''a}}{f''a}$$

получимъ $z = 0 \cdot 037$;

$$b' = b - z = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 037 = 5 \cdot 563.$$

Эта величина тоже разнится отъ истинной $> 0 \cdot 001$.

---

*) Ежели возмемъ z противъ форм. (3) только въ три цифры: $z = 0.038$, получимъ большой предѣлъ $x = 5.562$; если возмемъ лишнюю цифру, какъ здѣсь, $z = 0.0385$, получимъ малый предѣлъ $x = 3.5615$.

И такъ обѣ исправленныя формулы для y и z, не отвѣчаютъ формулѣ (3), и потому негодятся. Напротивъ формулы (z) и (y) взятыя просто, безъ поправки, переступая обѣ черезъ корень, даютъ самую близкую величину корня; по нимъ и будемъ вычислять.

Перейдемъ къ новымъ предѣламъ

	0	I.	II.	III.	IV.
	—	+	+	+	+
(3.561)...	— 0.002273806165	4.103211924	35.972652	49.560	24
h = 0.001..	+ 0.004103211924	0.035972652	0.049560	0.024	
$\frac{h}{2}$ = ...	+ 0.000017986326	0.000024780	0.000012		
$\frac{h}{3}$ = ...	+ 0.000000008260	0.000000004			
$\frac{h}{4}$ = ...	+ 0.000000000001				
(3.562)...	+ 0.001847400346.	+ 4.139209360.	+ 36.022224.	+ 49.584.	+ 24

И какъ f^0 между предѣлами $3 \cdot 561$ и $3 \cdot 562$ переходитъ съ — на +, сталобыть дѣйствительно корень ея заключается между ими.

Здѣсь $\Delta = 0 \cdot 001 = (0 \cdot 1)^3$; $p = 3$,

$$\frac{f^{\mathrm{IV}}}{6f''} = \frac{24}{216.133344} = (0.1)^0; \quad q = 0;$$

будетъ $\quad \Delta' < \Delta^{3p+q} < (0 \cdot 1)^9 < 0 \cdot 000000001.$

Для вычисленія по формулѣ (z)

$$z = \frac{f'b - \sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b}}{f''},$$

имѣемъ

$$(f'b)^2 = (4.13920936)^2 = \quad 17.1330541259116096$$
$$-2fbf''b = -\ 0.1330949381625798 08$$
$$\sqrt{16.9999591877490305 92}$$
$$= \quad 4.123100676.$$

И такъ
$$f'b = \quad 4.139209360$$
$$-\sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b} = -4.123100676$$
$$\overline{0.016108684}$$

раздѣля на $f''b$, получимъ

$$z = \frac{0.016108604}{36.022224} = 0.000447187.$$

Наконецъ

$$b' = 3.562000000$$
$$z = 0.000447187$$
$$x = b' - z = \overline{3.561552713.}$$

Возмемъ еще

$$\begin{aligned}
f(x) &= \quad x^4 + \ x^3 - 2x^2 - 7x - 5 \\
f' &= \ 4x^3 + 3x^2 - 4x \ \ - 7 \\
f'' &= 12x^2 + 6x \ \ - 4 \\
f''' &= 24x \ \ + 6 \\
f^{\text{IV}} &= 24.
\end{aligned}$$

Корень заключается между 1 и 2·1. Получимъ

	0	I.	II.	III.	IV.
	— 3	29	56	54	24
(2)·······	—	+	+	+	+
	0·1891	34·874	61·52	56·4	24
(2·1)·····	+	+	+	+	+.

Посмотримъ сперва, можно ли начинать линейное приближеніе:

Поставя въ формулу

$$\Delta' < \Delta^2 \frac{f''b}{2f'b}$$

$$\varDelta = (0.1)^1;\ p = 1;\ \frac{f''b}{2f'b} = \frac{61.52}{29} = (0.1)^{-1};\ q = -1;$$

видимъ, что условіе $2p + q > p$ неудовлетворяется: слѣдовало бы еще сближать предѣлы.

Но для формулы (3)

$$\varDelta' < \varDelta^3 \frac{f^{\mathrm{IV}}}{6f''}$$

имѣемъ

$$\varDelta = (0.1)^1;\ p = 1;\ \frac{f^{\mathrm{IV}}}{6f''} = \frac{24}{369.12} = (0.1)^1;\ q = 1;$$

$$3p + q > q$$

удовлетворяется. $\varDelta' < (0 \cdot 1)^4 < 0 \cdot 0001$: можемъ начинать приближеніе втораго порядка.

Для постановленія въ формулу (z) имѣемъ:

$$\sqrt{(f'b)^2 - 2fbf''b} = \sqrt{1192 \cdot 929012}$$

$$= 34 \cdot 5388$$

$$z = \frac{0.3352}{61.52} = 0.00545$$

откуда $b' = b - z = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0054 = 2 \cdot 0946$, *б.* пр.

$a' = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 00545 = 2 \cdot 09455$ м. пр.

большой и малый предѣлы, разнящіеся отъ истиннаго корня меньше 1 въ 4-й цифрѣ. Въ самомъ дѣлѣ:

(2.1)........	$+0.1891$	$+34.874$	$+61.52$	$+56.4$	24
$h = -0{,}0054$...	-0.1883196	-0.332208	-0.30456	-0.1296	
$\frac{h}{2}$...........	$+0\ 0008969616$	$+0.000822312$	$+0.00034992$		
$\frac{h}{3}$...........	-0.0000014801616	-0.000000629856			
$\frac{h}{4}$...........	$+0.0000000008503056$				

(2.0946).....$+0.0016758822887056$, $+34.542613682144$, $+61.21578992$, $+56.2704$, 24

Если бы теперь подставили $h = 0 \cdot 0001$, то нашли бы для малаго предѣла

$$f^{0}(2 \cdot 0945) = -;$$

но какъ намъ не нужно это подстановленіе, то мы идемъ дальше отъ большаго предѣла.

Здѣсь $\Delta = 0 \cdot 0001 = (0 \cdot 1)^{4}$; $p = 4$

$$\frac{f^{IV}}{6f''} = \frac{24}{367} = (0.1)^{1}; \ q = 1;$$

$$\Delta' < \Delta^{3p+q} < (0 \cdot 1)^{13} > 0 \cdot 0000000000001.$$

Извлеченіе радикала и дѣленіе надо продолжать до 13 цифры. Для подстановленія въ (z) имѣемъ

$$\begin{aligned}
(f'b)^{2} &= (34.542613682144)^{2} \\
&= \ \ 1193.19215999384186986443673 6 \\
-2fbf''b &= -\ \ 0.2051809162321015966551 04 \\
\sqrt{(f')^{2} - 2ff''} &= \sqrt{1192.98,67,79,07,76,92,76,82,67,78,16,32} \\
&= \ \ 34.5396435864443.
\end{aligned}$$

Потомъ

$$\begin{aligned}
f'b &= \ \ 34.542613682144 \\
-\sqrt{(f')^{2} - 2ff''} &= -34.5396435864443 \\
& \ \ \ \ \ 0.0029700956997.
\end{aligned}$$

Далѣе

$$z = \frac{0 \cdot 0029700956997}{61 \cdot 21578992} = 0 \cdot 0000485184576.$$

Наконецъ

$$\begin{aligned}
b' &= \ \ 2.0946000000000 \\
-z &= -0.0000485184576 \\
x = b' - z &= \ \ 2.0945514815424\ldots
\end{aligned}$$

Мы уже нашли этотъ корень на стр. 213.

Здѣсь $\Delta = (0 \cdot 1)^{15}$; $p = 13$; $q = 1$; при третьемъ подстановленіи получили бы

$$\Delta' < (0 \cdot 1)^{3p+q} < (0 \cdot 1)^{40},$$

тридцать девять цифръ вѣрныхъ.

По линейному приближенію начиная отъ первой десятичной, мы имѣли бы число цифръ

1 2 4 8 16 32

не менѣе, какъ въ шесть пріемовъ. Въ большой части практическихъ случаевъ довольствуются приближеніемъ корня до 2, 3 и 4 десятичныхъ; по этому способу мы получимъ ихъ въ одинъ пріемъ.

Приближенія третьяго и высшихъ перядковъ, судя по второму, конечно еще успѣшнѣе; но ихъ еще труднѣе подвести подъ простыя формулы.

Для третьяго порядка слѣдовало бы написать разложеніе

$$0 = f(x) = f(a+y) = fa + yf'a + \frac{y^2}{1.2}f''a + \frac{y^3}{1.2.3}f'''a$$
$$+ \frac{y^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a+\theta y),$$

и бросивъ послѣдній членъ, разсмотрѣть уравненіе 3-й степени по y, найти условія вещественности y, вывести простое выраженіе приближенной величины его, не переходящей ни за корень, ни за предѣлъ, и наконецъ, степень приближенія, т. е. отношеніе разностей Δ' и Δ, которое, судя по аналогіи, выразится, вѣроятно, такъ

$$\Delta' < \frac{\Delta^4}{1.2.3.4} \frac{f^{\text{v}}}{f'''}$$

и дастъ приближеніе, возрастающее вчетверо.

Приближеніе втораго порядка даетъ еще легкій способъ отличать вещественные и мнимые корни.

Положимъ, что отъ постановленія въ рядъ производныхъ функцій, двухъ чиселъ a и b, получили слѣдующія строки:

$$\begin{array}{lcccccc} & 0 & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & & \\ (a)\cdots\cdots & + & - & + & + & \cdots\cdots & + \\ (b)\cdots\cdots & + & + & + & + & \cdots\cdots & + \\ \hline & 2 & 1 & 0 & 0. & & \end{array}$$

Между a и b можемъ искать двухъ корней начальной функціи; надобно узнать, какіе они: вещественные или мнимые.

Въ $f(x)$ вмѣсто x поставимъ $a+(x-a)=a+\delta$, будетъ

$$0=fx=f(a+\delta)=fa+\delta f'a+\frac{\delta^2}{2}f''a+\frac{\delta^3}{2.3}f'''(a+\theta\delta)$$

по положенію f''' положительная: бросивъ послѣдній членъ мы уменьшимъ $f(x)$, и будетъ

$$f(x)>fa+\delta f'a+\frac{\delta^2}{2}f''a;$$

$$fa+\delta f'a+\frac{\delta^2}{2}f''a<0\ldots F(\delta).$$

Но если вмѣсто a въ f'' поставимъ b, найдемъ

$$f(x)<fa+\delta f'a+\frac{\delta^2}{2}f''b;$$

$$fa+\delta f'a+\frac{\delta^2}{2}f''b>0\ldots\varphi(\delta)$$

Въ концѣ III. лекціи доказана теорема, что если сдѣлаемъ весьма малое измѣненіе въ коэфиціентахъ

$f(x)$, то корни ея, если были вещественные, останутся вещественными, если были мнимые, останутся мнимыми, развѣ будутъ въ ней „равные", чего мы не предполагаемъ.

И такъ въ $f(x)$, $F(\delta)$ и $\varphi(\delta)$ свойства корней не измѣнятся. Въ тоже время $f(x)$ представляетъ ординаты кривой; $F(\delta)$ тоже представляетъ ординаты другой кривой, весьма къ той близкой, которыя меньше ординатъ $f(x)$; и ежели $F(\delta)$ между a и b не пересѣкаетъ оси абциссъ, т. е. неимѣетъ двухъ корней, то первая и подавно не пересѣчетъ ее, т. е. $f(x)$ будетъ имѣть два корня мнимые.

Но уравнивъ $F(\delta)$ нулю:

$$fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2} f''a = 0,$$

получимъ

$$\delta = \frac{-f'a \pm \sqrt{(f'a)^2 - 2faf''a}}{f''a}$$

и признакъ двухъ мнимыхъ корней $f(x)$, когда они есть, выразится условіемъ

$$(f'a)^2 < 2faf''a \cdots\cdots\cdots\cdots (a).$$

Напротивъ изъ неравенства $\varphi(\delta)$, гдѣ $\varphi(\delta) > f(x)$, видимъ, что если кривая, которой ординаты $\varphi(\delta)$, пересѣкаетъ ось абциссъ, то кривая $f(x)$ и подавно имѣетъ два корня вещественные. Но уравнивъ нулю $\varphi(\delta)$, выразимъ признакъ вещественныхъ корней $f(x)$, условіемъ

$$(f'a)^2 > 2faf''b \cdots\cdots\cdots\cdots (b).$$

Къ подобнымъ заключеніямъ придемъ и отъ предѣла b.

Сдѣлавъ $x = b - (b - x) = b - \delta$, получимъ

$$0 = f(b-\delta) = fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''b - \frac{\delta^3}{2.3} f'''(b-\theta\delta) \ldots f(x),$$

откинувъ послѣдній членъ, увеличимъ вторую часть уравненія, и будетъ

$$f(x) < fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''b$$

$$fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''b > 0 \ldots \mathrm{F}(\delta)$$

Но поставя въ f'' вмѣсто b другой предѣлъ a, получимъ

$$f(x) > fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''a$$

$$fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''a < 0 \ldots \varphi(\delta).$$

Изъ неравенства $\mathrm{F}(\delta) > f(x)$ видимъ, что если кривая $\mathrm{F}(\delta)$ пересѣкаетъ ось абциссъ, то $f(x)$ и подавно имѣетъ корни вещественные, и признакъ ихъ вещественности выразится условіемъ

$$(f'b)^2 > 2fbf''b \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Напротивъ изъ неравенства $\varphi(\delta) < f(x)$ выведемъ условіе для мнимыхъ корней

$$(f'b)^2 < 2fbf''a \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

Можетъ случиться, что ни одно изъ четырехъ условій: (a), (b), (c), (d) не существуетъ, или удовлетворяются всѣ четыре заразъ; это значитъ, предѣлы не довольно сближены, чтобъ съ одного пріема можно было судить, какіе корни: вещественные или мнимые. Въ такомъ случаѣ надо сблизить предѣлы. Если новое подстановленіе разобьетъ корни, дѣло кончено; если нѣтъ, подставимъ новые предѣлы a', b', въ которое нибудь изъ условій (a), (b), (c), (d): если оно существуетъ, мы узнаемъ какіе корни и проч.

Для примѣра возмемъ первое изъ уравненій выше приведенныхъ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x + 2 \\
f' &= 4x^3 - 18x^2 + 12x + 9 \\
f'' &= 12x^2 - 36x + 12 \\
f''' &= 24x - 36 \\
f^{\text{IV}} &= 24.
\end{aligned}
$$

отъ постановленія чиселъ 3 и 4 получаемъ слѣдующія строки:

	0	I.	II.	III.	IV.
(3)·····	+	—	+	+	+
	2	9	12	36	24
(4)·····	+	+	+	+	+
	6	25	60	60	24
	2	1	0		

Два корня оказываются между 3 и 4.

Ежели они мнимые, должно быть

$$(f'a)^2 < 2faf''a \cdots\cdots\cdots (a),$$

т. е. $$(-9)^2 < 2(2)12,$$

или $$81 < 48:$$

неудовлетворяется.

Ежели они вещественные, должно быть

$$(f'a)^2 > 2faf''b \cdots\cdots\cdots\cdots (b),$$

т. е. $$81 > 4(60):$$

тоже не удовлетворяется; формулы (c) и (d) также ничего непоказываютъ; значитъ предѣлы не довольно сближены.

Подставя $3 \cdot 6$, получимъ

	0	I.	II.	III.	IV.
	2	9	12	36	24
(3)······	+	—	+	+	+
	0·1856	5·544	37·29	50·4	24
(3·6)···	+	+	+	+	+.

Формулы (a), (b), (d) и теперь неудовлетворяются; но формула (c)

$$(f'b)^2 > 2fbf''b$$

даетъ $$(-5 \cdot 544)^2 > 2(0 \cdot 1856)37 \cdot 29.$$

Заключаемъ, что корни вещественные. И это дѣйствительно такъ, (лекц. IX.).

Возмемъ еще другое изъ уравненій, котораго корень вычисляли въ этой лекціи

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 7x - 5;$$

и перемѣня x на $-x$, получимъ

$$\begin{aligned} f(-x) &= x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 5 \\ f' &= 4x^3 - 3x^2 - 4x + 7 \\ f'' &= 12x^2 - 6x - 4 \\ f''' &= 24x - 6 \\ f^{\text{IV}} &= 24. \end{aligned}$$

Отъ постановленія $0 \cdot 5$ и 1, получимъ

	0	I.	II.	III.	IV.
(0·5)....2·6875		4·75	4	6	24
	—	+	—	+	+
(1)........0		4	2	18	24
	+	+	+	+	+
	2	2	1	0,	

оказываются два корня между 0·5 и 1. Посмотримъ какіе они?

Взявъ f' за начальную, приложимъ формулу (a) перваго случая

$$(f'a)^2 < 2faf''a$$

или $$16 < 2(4 \cdot 95)6 < 59 \cdot 4$$

удовлетворяется. Сталобыть въ f' и $f^0(x)$ между — 1 и — 0·5 недостаетъ двухъ корней.

II. Разсмотримъ другой случай:

	0	I.	II.	III.	
(a)......	+	—	+	—.......	+
(b)......	+	+	+	—.......	+

Точно также напишемъ

$$0 = f(a + \delta) = fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{1.2}f''a + \frac{\delta^3}{1.2.3}f'''(a + \theta\delta) \ldots f(x).$$

f''' отрицательная, бросивъ послѣдній членъ, увеличимъ вторую часть $f(x)$, и получимъ неравенства:

$$f(x) < fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2}f''a \ldots \varphi(\delta)$$

$$f(x) > fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2}f''b \ldots \psi(\delta),$$

Изъ $\psi(\delta)$ найдемъ условіе мнимости корней

$$(f'a)^2 < 2faf''b \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (a).$$

Изъ $\varphi(\delta)$ условіе вещественности ихъ

$$(f'a)^2 > 2faf''a \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (b).$$

Точно также и отъ другаго предѣла

$$0 = f(x) = f(b-\delta) = fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2}f''b - \frac{\delta^3}{2.3}f'''(b-\theta\delta),$$

бросивъ послѣдній членъ, мы уменьшимъ вторую часть, и получимъ неравенства:

$$f(x) > fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2}f''b \ldots . \varphi_i(\delta)$$

$$f(x) < fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2}f''a \ldots . \psi_i(\delta)$$

Изъ $\psi_i(\delta)$ имѣемъ условіе вещественности

$$(f'b)^2 > 2fbf''a \ldots\ldots . (c).$$

Изъ $\varphi_i(\delta)$ имѣемъ условіе мнимости корней

$$(f'b)^2 > 2fbf''b \ldots\ldots . (d).$$

III. Когда будетъ

	0	I.	II.	III.	
(a)	$-$	$+$	$-$	$+$	.... $+$
(b)	$-$	$-$	$-$	$+$	.... $+$

получимъ

$$0 = f(a+\delta) = fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2}f''a + \frac{\delta^3}{2.3}f'''(a+\theta\delta) \ldots f(x).$$

Здѣсь f''' съ $+$; f^0 съ $-$; бросивъ послѣдній членъ, мы уменьшимъ вторую часть и будетъ

$$f(x) > fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2} f''a \ldots . \varphi(\delta)$$

$$f(x) < fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2} f''b \ldots . \psi(\delta).$$

$f(x)$ съ —; изъ $\psi(\delta)$ имѣемъ для мнимыхъ корней

$$(f'a)^2 < 2faf''b \ldots \ldots (a).$$

Изъ $\varphi(\delta)$ условіе для вещественныхъ

$$(f'a)^2 > 2faf''a \ldots \ldots (b).$$

Отъ другаго предѣла получимъ

$$0 = f(b - \delta) = fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''b - \frac{\delta^3}{3} f'''(b - \theta\delta) \ldots . f(x),$$

бросивъ послѣдній членъ, увеличимъ вторую часть, и будетъ

$$f(x) < fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''(b) \ldots . \varphi_{/}(\delta)$$

$$f(x) > fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''a \ldots . \psi_{/}(\delta).$$

Изъ $\psi_{/}(\delta)$ условіе вещественности корней

$$(f'b)^2 > 2fbf''a \ldots \ldots (c).$$

Изъ $\varphi_{/}(\delta)$ условіе мнимости ихъ

$$(f'b)^2 < 2fbf''b \ldots \ldots (d).$$

IV. Наконецъ, когда строки (a) и (b) слѣдующія:

		0	I.	II.	III.			
(a)	.....	—	+	—	—	+	.....	+
(b)	.....	—	—	—	—	+	.....	+

то изъ

$$0 = f(a + \delta) = fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2} f''a + \frac{\delta^3}{2.3} f'''(a + \theta\delta) \ldots f(x)$$

найдемъ неравенства

$$f(x) < fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2} f''a \ldots\ldots \varphi(\delta)$$

$$f(x) > fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2} f''b \ldots\ldots \psi(\delta).$$

и изъ $\varphi(\delta)$ условіе мнимости корней

$$(f')^2 a < 2faf''a \ldots\ldots (a).$$

Изъ $\psi(\delta)$ условіе вещественности

$$(f'a)^2 > 2faf''b \ldots\ldots (b).$$

Отъ другаго предѣла

$$0 = f(b-\delta) = fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''b - \frac{\delta^3}{2.3} f'''(b + \theta\delta) \ldots f(x).$$

Здѣсь бросивъ послѣдній членъ, уменьшимъ вторую часть, и будетъ

$$f(x) > fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''b \ldots\ldots \varphi_{/}(\delta)$$

$$f(x) < fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''a \ldots\ldots \psi_{/}(\delta)$$

Изъ $\varphi_{/}(\delta)$ имѣемъ условіе вещественности корней

$$(f'b)^2 > 2fbf''b \ldots\ldots\ldots (c).$$

Изъ $\psi_{/}(\delta)$ условіе для мнимыхъ

$$(f'b)^2 < 2fbf''a \ldots\ldots\ldots (d).$$

Само собою разумѣется, что все это имѣетъ мѣсто только тогда, когда сближенные предѣлы даютъ строку разностей

2 1 0 0 0,

и когда равные корни, и множители въ производныхъ функціяхъ исключены.

Вообще замѣтимъ, что смыслъ тѣхъ неравенствъ, о которыхъ до сихъ поръ разсуждали, будетъ совершенно ясенъ, когда мы хорошо помнимъ, различіе между положительными и отрицательными количествами. Именно, когда положительное количество увеличивается, то и численная величина его увеличивается; когда отрицательное количество увеличивается, то численная величина его уменьшается.

Когда говоримъ, отрицательное количество больше другаго, подразумѣваемъ, что численная величина его меньше той. Наконецъ, что положительное количество >0, отрицательное количество <0.

Такъ въ послѣднемъ IV. случаѣ, въ неравенствѣ

$$f(x) > \varphi_{/}(\delta);$$

нашли что ордината $\varphi_{/}(\delta)$ меньше ординаты $f(x)$; и въ тоже время $\varphi_{/}(\delta) < 0$, сталобыть отрицательная, и это при всѣхъ величинахъ δ, сталобыть и при $\delta = 0$, гдѣ $\varphi(0) = fb$, а по строкѣ знаковъ, $f(b)$ отрицательная, то численная величина $\varphi_{/}(\delta)$ больше численной величины $f(x)$; или говоря относительно оси абциссъ, кривая $\varphi_{/}(\delta)$ дальше отъ нее, чѣмъ кривая $f(x)$; слѣдств. ежели $\varphi_{/}(\delta)$ пересѣкаетъ ось, т. е. имѣетъ корни вещественные, то $f(x)$ и подавно.

Напротивъ во II. случаѣ хотя нашли точно такое же неравенство $\quad f(x) > \varphi_{/}(\delta)$.

Но какъ при $\delta = 0$, $\varphi_{/}(0) = fb$, а знакъ fb есть $+$, то когда говоримъ что $\varphi_{/}(\delta)$ меньше $f(x)$, значитъ и численная величина ея меньше, значитъ $\varphi_{/}(\delta)$ ближе къ оси абциссъ чѣмъ $f(x)$; то если $\varphi_{/}(\delta)$ не пересѣкаетъ ось, $f(x)$ и подавно не дойдетъ нее, т. е. корни ея мнимыя.

ЛЕКЦІЯ XIV.

Сводъ главнѣйшихъ свойствъ цѣлой раціональной функціи.

Повторимъ теперь вкратцѣ все то, что мы знаемъ о свойствахъ цѣлой раціональной функціи, которой общій видъ

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots Kx + L \cdot\cdot f(x).$$

A, B, C···K, L, какіе нибудь числа; n непремѣнно цѣлое число *).

Можемъ x сдѣлать такъ малымъ, что L будетъ больше суммы всѣхъ остальныхъ членовъ; и на оборотъ, сдѣлать x такъ великимъ, что Ax^n превзойдетъ сумму всѣхъ остальныхъ. (Лекц. I.)

---

*) Нѣкоторые изъ слушателей Г. Остроградскаго и читателей этого изданія, имѣвшіе случай получить его въ листахъ, еще до опубликованія, изъявили свое сомнѣніе, если не на счетъ справедливости сказаннаго въ началѣ IV. лекціи,

$f(x)$ имѣетъ столько корней, вида

$$a + bi,$$

сколько n имѣетъ единицъ (лекц. II.), гдѣ a и b вещественные; i мнимый знакъ, котораго квадратъ $i^2 = -1$. Она разлагается на столько же линейныхъ множителей, сколько корней,

$$x - x_1 \quad x - x_2 \cdots$$

такъ что

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(\cdots)(x - x_n);$$

каждый изъ этихъ множителей вида

$$x - a - bi = x - x_1.$$

Когда есть одинъ такой множитель, то есть непремѣнно и другой

$$x - a + bi = x - x_2.$$

покрайней мѣрѣ на счетъ совершенной необходимости понимать „рѣшеніе уравненій" такъ какъ тамъ предложено; а тамъ предложено совсѣмъ противное тому, какъ всѣ почти до сихъ поръ это понимаютъ. Очень вѣроятно, что по выходѣ листовъ, повторятся тѣже возражанія; то, чтобъ предъупредить ихъ, и больше ознакомить съ знакомъ ∇, мы рѣшились прибавить эту лекцію, хотя она и небыла читана Г. Остроградскимъ, извлекши ее изъ всего до сихъ поръ имъ пройденнаго, и изъ его отвѣтовъ на подобныя возраженія, которыя случилось намъ слышать; а между тѣмъ тутъ вкратцѣ, только совершенно въ новомъ видѣ, повторится вся теорія цѣлыхъ раціон. функцій.

С. Б.

Произведенiе двухъ такихъ множителей, даетъ множителя второй степени

$$x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,$$

гдѣ α_1 и β_1 вещественные.

Если n число четное, $f(x)$ разложится на множителей второй степени

$$f(x) = (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)(x^2 + \alpha_2 x + \beta_2)(x^2 + \alpha_3 x + \beta_3)(\cdots)(x^2 + \alpha_{\frac{n}{2}} x + \beta_{\frac{n}{2}})$$

$\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_{\frac{n}{2}}\ \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_{\frac{n}{2}}$ вещественные.

Ежели n число нечетное, одинъ изъ множителей непремѣнно будетъ линейный:

$$f(x) = (x - \alpha)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)(x^2 + \alpha_2 x + \beta_2)(\cdots)(x^2 + \alpha_{\frac{n-1}{2}} x + \beta_{\frac{n-1}{2}})$$

гдѣ α, одинъ изъ корней, непремѣнно вещественный.

Разысканiе множителей сводится на разысканiе корней, т. е. чиселъ, которые, будучи поставлены въ $f(x)$ на мѣсто x, дѣлаютъ

$$f(x) = 0.$$

Алгебрическое дѣйствiе, которымъ разыскиваются корни цѣлыхъ рацiональныхъ функцiй, называется „рѣшенiе уравненiй“.

Это дѣйствiе состоитъ изъ двухъ прiемовъ: первый *отдѣляетъ* корни, т. е. находитъ предѣлы a и b, между которыми должно искать одного или пару корней. Второй, *вычисляетъ* величину *одного* корня, до какой надобно степени приближенiя.

Для отдѣленія и вычисленія корней мы предложили нѣсколько способовъ, посредствомъ которыхъ дѣйствіе „рѣшенія уравненій“ вполнѣ опредѣлено, извѣстно, точно также, какъ и всѣ обыкновенныя Алгебрическія дѣйствія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени и извлеченіе радикаловъ; которые, надъ числами производятся въ числахъ, *надъ буквами въ буквахъ, посредствомъ условныхъ знаковъ.*

Каждый изъ этихъ знаковъ имѣетъ свои, ему одному принадлежащія *свойства:* наприм, знакъ $+$, свойство увеличивать; знакъ —, уменьшать и проч.

Надъ каждымъ изъ этихъ знаковъ Алгебра производитъ всѣ свои „дѣйствія:“ наприм. надъ радикаломъ, она производитъ: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени, „преобразованія и сокращенія.“

Такъ и „рѣшеніе уравненій“ мы совершенно умѣемъ теперь производить въ числахъ надъ всякою цѣлою раціональною функціею. Что касается до этого дѣйствія въ буквахъ, мы выразили его особымъ знакомъ ∇ (лекц. IV.); — для прочихъ дѣйствій не больше же этого дѣлаемъ; — останется показать „свойства“ новаго знака, и какъ „производить надъ нимъ всѣ другія Алгебрическія дѣйствія.“ Если мы это сдѣлаемъ, то будемъ совершенно вправѣ сказать, какъ уже и сказали, что Алгебра „рѣшаетъ всѣ уравненія.“

Раздѣливъ $f(x)$ на коэфиціентъ перваго ея члена, A, получимъ

$$\frac{f(x)}{A} = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-2} x^2$$

$$+ a_{n-1} x + a_n \cdots\cdots \varphi(x),$$

Корень $\varphi(x)$ мы означили (лекц. IV.) чрезъ

$$x = \nabla (a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) \ldots (1).$$

коэфиціентъ перваго члена всегда предполагается 1, и сюда не входитъ.

Разсмотримъ напередъ „свойства" этого знака ∇; а эти свойства, нечто иное, какъ полная теорія уравненій.

1. Число коэфиціентовъ подъ знакомъ ∇ опредѣляетъ степень уравненія, коэфиціенты, самое уравненіе. Пусть

$$x = \nabla (-1, 0, 3, -5);$$

уравненіе, котораго корень есть x, будетъ, по числу коэфиціентовъ, четвертой степени:

$$x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 + 3x - 5,$$

или $$x^4 - x^3 + 3x - 5.$$

Корень уравненія $x^4 - 5$,

получится $x = \nabla (0, 0, 0, -5) = \sqrt[4]{5}$.

Иногда для сокращенія будемъ писать и такъ

$$x = \nabla (0_3, -5) = \sqrt[4]{5}$$

ставя подъ нулемъ число недостающихъ членовъ.

2. Въ частномъ случаѣ, каковъ теперь, когда всѣ коэфиціенты, кромѣ послѣдняго, равны нулю, ∇ обращается въ $\sqrt{}$; т. е. „извлеченіе радикаловъ" есть

только частный случай „рѣшенія уравненій;“ но съ тою разностію, что извлеченіе радикаловъ, разсматриваемое отдѣльно, даетъ для радикаловъ всякихъ степеней: *нечетныхъ,* только одну величину, для *четныхъ,* только двѣ; тогда какъ ∇ опредѣляетъ для радикала столько величинъ, сколько ихъ должно быть, по числу единицъ въ показателѣ.

Мало этого, самое вычисленіе радикаловъ имѣетъ разительное сходство съ вычисленіемъ корней:

Вычисляя радикалъ

$$x = \sqrt[m]{A}$$

мы дѣлаемъ тоже, какъ будто рѣшаемъ

$$f(x) = x^m - A;$$

именно: сперва находимъ приближенную величину радикала, $x = a$; потомъ изъ A вычитаемъ a^m, остатокъ $R = A - a^m$ дѣлимъ на ma^{m-1} и т. д. и получаемъ

$$x = a + \frac{A - a^m}{ma^{m-1}}.$$

Съ другой стороны, по линейному приближенію, тоже находимъ сперва предѣлъ a; остатокъ

$$R = A - a^m = -f(a)$$

дѣлимъ на $$ma^{m-1} = f'(a)$$

и получаемъ

$$x = a + \frac{-fa}{f'a}.$$

Тоже сходство найдемъ между вычисленіемъ радикала и вычисленіемъ корня по непрерывнымъ дробямъ: первый членъ формулы (17) лекц. X. есть тоже $\frac{-fa}{f'a}$, но съ тою разностію, что въ нее входятъ еще два члена, которые пренебрегаются въ линейномъ приближеніи. И поэтому-то формула (17) начинаетъ свое приближеніе раньше, т. е. послѣ перваго подраздѣленія предѣловъ

$$a \text{ и } a + 1$$

и простираетъ его гораздо дальше, чѣмъ линейное.

3. Если въ выраженіи

$$x = \nabla(a_1 a_2 \cdots a_n),$$

корня функціи $\varphi(x)$, будетъ нѣсколько коэфиціентовъ сряду или партіями, $= 0$, мы разыщемъ (лекц. VII.) сколько величинъ ∇, по одной этой причинѣ, будетъ мнимыхъ.

4. Извѣстно, что сумма всѣхъ величинъ ∇, $= -a_1$, т. е. $\nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3 + \cdots + \nabla_n = -a_1$;

сумма двойныхъ, тройныхъ, четверныхъ и т. д. произведеній изъ всѣхъ „значеній“ ∇, $= + a_2$, $- a_3$, $+ a_4 \cdots$; наконецъ произведеніе всѣхъ величинъ ∇,

$$\nabla_1 \nabla_2 \nabla_3 \cdots \nabla_n = \pm a_n.$$

Ежели $n = 2m$, *четное*, и послѣдній членъ будетъ $- a_n = - a_{2m}$, то покрайней мѣрѣ одинъ изъ корней ∇ непремѣнно *отрицательный*.

Ежели $n = 2m + 1$, *нечетное*, и послѣдній членъ $= + a_n = + a_{2m+1}$, то по меньшей мѣрѣ одинъ изъ корней ∇ непремѣнно *отрицательный*.

5. **Предѣлъ числа „положительныхъ“ ∇, равенъ числу „перемѣнъ“ знаковъ при коэфиціентахъ**

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n;$$

предѣлъ числа „отрицательныхъ“ ∇, равенъ числу „постоянствъ“ знаковъ при

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n.$$

Это „правило знаковъ“ Декартово, выводится какъ слѣдствіе теоремы Фурье. Въ самомъ дѣлѣ: ежели на мѣсто x поставимъ $x = 0$, получимъ строку (0), съ тѣми же знаками, какіе при коэфиціентахъ

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n,$$

и съ тѣмъ же числомъ перемѣнъ.

Но число перемѣнъ знаковъ въ строкѣ (0), есть предѣлъ числа положительныхъ ∇, (нѣсколько паръ изъ нихъ могутъ быть мнимые), поэтому и проч.

6. **Ежели всѣ $a_1 a_2 \cdots a_n$ положительные и $= 1$, то всѣ ∇ мнимые, когда n четное; и только одно ∇ вещественное и $= -1$, а прочіе всѣ мнимые, когда n нечетное.**

Показавъ главнѣйшія свойства знака ∇, по которымъ, не производя самою вещію дѣйствія имъ означаемаго, уже можемъ предвидѣть очень многія обстоятельства корней; а ихъ часто бываетъ достаточно для рѣшенія вопроса. Посмотримъ теперь, какъ производить надъ нимъ всѣ Алгебрическія дѣйствія; это раскроетъ намъ другія свойства ∇.

7. **Какое бы „дѣйствіе“ одно, или нѣсколько, или всѣ, намъ ни понадобилось произвесть надъ корнемъ функціи $\varphi(x)$**

$$x = \nabla(a_1 a_2 \cdots a_n),$$

всегда это дѣйствіе, принявъ ∇ за „измѣняемое," можемъ выразить черезъ

$$z = \psi[\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)],$$

или просто

$$z = \psi(\nabla).$$

Но какъ ∇ имѣетъ столько значеній, сколько „подъ нимъ" коэфиціентовъ, то назвавъ эти значенія или корни $\varphi(x)$ черезъ

$$\nabla_1,\ \nabla_2,\ \nabla_3,\ \cdots \nabla_n$$

составимъ n линейныхъ множителей:

$$(z - \psi\nabla_1)(z - \psi\nabla_2)(z - \psi\nabla_3)(\cdots)\cdots(z - \psi\nabla_n),$$

и перемноживъ самымъ дѣломъ, получимъ

$$F(z) \ldots z^n - (\psi\nabla_1 + \psi\nabla_2 + \ldots + \psi\nabla_n)z^{n-1} + (\psi\nabla_1\psi\nabla_2$$
$$+ \ldots + \psi\nabla_{n-1}\psi\nabla_n)z^{n-2} - \ldots \pm \psi\nabla_1\psi\nabla_2\psi\nabla_3\ldots\psi\nabla_n,$$

или означивъ численные коэфиціенты $F(z)$ чрезъ

$$b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$$

$$F(z) \cdots z^n - b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} - \cdots \mp b_{n-1} z \pm b_n,$$

откуда вообще

$$z = \psi\nabla[(a_1 a_2 \cdots a_n)]$$
$$= \nabla(-b_1,\ b_2,\ -b_3,\ b_4 \cdots \mp b_{n-1},\ \pm b_n).$$

Пояснимъ это общее правило частными случаями, гдѣ все дѣло будетъ состоять въ томъ, чтобы искомые $b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_n$

найти въ данныхъ

$$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n\ ^*).$$

8. *Сложенiе* и *вычитанiе:*

Еслибъ изъ выраженiя

$$\nabla(a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n) \pm \alpha$$

и не можно было вывести какихъ либо ясныхъ заключенiй, то и тогда оно въ своемъ родѣ было бы то же, что наприм.

$$A \pm \sqrt[m]{B}$$

въ своемъ родѣ. Здѣсь радикалъ m-й степени нельзя извлечь изъ B и сложить или вычесть изъ A, пока не перейдемъ къ числамъ. Мы „привыкли" считать выраженiе $A \pm \sqrt[m]{B}$ яснымъ и конченнымъ, а между тѣмъ оно показываетъ только: какiя дѣйствiя нужно произвесть надъ A и B, когда они будутъ даны въ числахъ, ни какъ не больше.

Стоитъ только намъ „привыкнуть" къ знаку ∇, и выраженiя, подобныя

$$\nabla(a_1 \ldots\ldots a_n) \pm \alpha,$$

точно также будутъ для насъ опредѣлительны, ясны. Они тоже показываютъ своего рода дѣйствiе надъ буквами, которое легко произведемъ, когда буквы даны будутъ въ числахъ.

---

*) Въ общей теорiи Алгебрическихъ функцiй это будетъ показано общимъ образомъ.

Но между тѣмъ этому же выраженію можно придать другой, гораздо опредѣлительнѣйшій смыслъ; именно $\nabla(a_1\ a_2 \ldots . a_n)$

означаетъ корни функціи

$$\varphi(x)\ldots x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n;$$

и потому $\nabla(a_1\ a_2 \ldots .. a_n) \pm \alpha$

означаетъ корни

$$\varphi(x \pm \alpha) = \varphi(x) \pm \alpha\varphi'(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\varphi''(x) \pm \ldots \pm \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}.\varphi^n(x).$$

Возмемъ всѣ производныя отъ $\varphi(x)$: первую производную умножимъ на $\frac{\alpha}{1}$, вторую на $\frac{\alpha^2}{1.2}$, 3-ю на $\frac{\alpha^3}{1.2.3}\ldots . n$-ю на $\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}$, сложимъ, и получимъ

$$\varphi(x \pm \alpha) = x^n \pm A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} \pm \ldots \pm A_n;$$

наконецъ

$$\nabla(a_1\ a_2 \ldots a_n) \pm \alpha = \nabla(A_1A_2 \ldots . A_n) \ldots . (1).$$

Напримѣръ, требуется найти

$$z = \nabla(-2,\ 0,\ -1) - 6.$$

Здѣсь

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x^3 - 2x^2 \qquad\qquad - 1 \\
-6\varphi' &= \quad -18x^2 + 24x \\
+\frac{6^2}{1.2}\varphi'' &= \qquad\qquad +108x - 72 \\
-\frac{6^3}{1.2.3}\varphi''' &= \qquad\qquad\qquad -216 \\
\hline
F(z) = \varphi(x-6) &= z^3 - 20z^2 + 132z - 288,
\end{aligned}$$

откуда

$$z = \nabla(-2,\ 0,\ -1) - 6 = \nabla(-20,\ 132,\ -288).$$

Если въ (1) возмемъ $\pm\alpha = -\frac{a_1}{n}$, то $A_1 = 0$, и получимъ

$$\nabla(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n) - \frac{a_1}{n} = \nabla(0,\ A_2 A_3 \ldots A_n)$$

корень такой функціи, въ которой втораго члена не будетъ.

Въ томъ же примѣрѣ поставимъ вмѣсто $\alpha = -\frac{a_1}{n} = \frac{2}{3}$, получимъ

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(x) &=& x^3 - 2x^2 \qquad - 1 \\
+ \frac{2}{3}\varphi' &=& + 2x^2 - \frac{8}{3}x \\
+ \frac{(\frac{2}{3})^2}{1\cdot 2}\varphi'' &=& + \frac{4}{3}x - \frac{8}{9} \\
+ \frac{(\frac{2}{3})^3}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi''' &=& + \frac{8}{27} \\
\hline
\end{array}$$

$$F(z) = \varphi(x + \tfrac{2}{3}) = z^3 - \tfrac{4}{3}z - \tfrac{43}{27}.$$

Второй членъ уничтожили; отсюда

$$z = \nabla(-2,\ 0,\ -1) + \tfrac{2}{3}$$
$$= \nabla(0,\ \tfrac{4}{3},\ -\tfrac{43}{27}).$$

Ниже увидимъ, какъ вывести знаменателя 27 за знакъ ∇.

Пусть еще $z = \nabla(a_1 a_2 \cdots a_n) \pm \nabla'(b_1 b_2 \cdots b_m)$.

Найти z, значитъ найти такую функцію, которой корень равенъ суммѣ или разности корней двухъ другихъ функцій. Это легко сдѣлать по общему правилу (7). Мы знаемъ что ∇, n-й функціи имѣетъ n величинъ

$$\nabla_1 \nabla_2 \nabla_3 \dots \nabla_n;$$

и ∇' m-й функціи имѣетъ m своихъ значеній

$$\nabla'_1 \nabla'_2 \nabla'_3 \dots \nabla'_m.$$

Напишемъ множители

$$[z-(\nabla_1 \pm \nabla'_1)][z-(\nabla_1 \pm \nabla'_2)](\dots)\dots[z-(\nabla_2 \pm \nabla'_1)](\dots)\dots[z-(\nabla_n \pm \nabla'_m)]$$

и перемноживъ самымъ дѣломъ, получимъ

$$z^{mn}-[(\nabla_1+\nabla_2+\dots\nabla_n)\pm(\nabla'_1+\nabla'_2+\dots+\nabla'_m)]z^{mn-1}$$
$$+\dots\pm(\nabla_1 \pm \nabla'_1)(\nabla_1 \pm \nabla'_2)(\dots)\dots(\nabla_n \pm \nabla'_m).$$

или $z^{mn}-(a_1 \pm b_1)z^{mn-1}+\dots\pm(a_n \pm b_m + \text{etc.})$,

откуда $z = \nabla(a_1 a_2 \dots a_n) \pm \nabla(b_1 b_2 \dots b_m)$

$$= \nabla[-(a_1 \pm b_1), \dots a_n \pm b_m + \&)].$$

Напримѣръ, пусть требуется найти

$$z = \nabla(-2,\ 1) + \nabla(1,\ -2)$$

будетъ $\varphi(x) = x^2 - 2x + 1$

$$\psi(x) = x^2 + x - 2.$$

x_1 и x_2 значенія $\nabla(a_1 a_2)$

y_1 и y_2 „ $\nabla(b_1 b_2)$,

будетъ

$$F(z) = [z - (x_1 + y_1)][z - (x_1 + y_2)][z - (x_2 + y_1)]$$
$$[z - (x_2 + y_2)];$$

перемноживъ самымъ дѣломъ и примѣчая что

$x_1 + x_2 = -a_1;\ y_1 + y_2 = -b_1;\ x_1 x_2 = a_2;\ y_1 y_2 = b_2$

будетъ

$$F(z) = z^4 + 2(a_1 + b_1)z^3 + [(a_1 + b_1)^2 + a_1 b_1 + (a_2 + b_2)]z^2$$
$$+ (a_1 + b_1)[a_1 b_1 + 2(a_2 + b_2)]z + (a_2 - b_2)^2 + a_1 b_1 (a_2 + b_2)$$
$$+ a_2 b_1{}^2 + b_2 a_1{}^2;$$

откуда $\qquad z = \nabla(a_1 a_2) + \nabla(b_1 b_2)$

$$= \nabla[2(a_1 + b_1),\ A,\ B,\ C].$$

Ежели $\qquad f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$\varphi(x) = x^2 + x - 2,$$

то $\qquad F(z) = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z + 4;$

и $\qquad z = \nabla(-2,\ 1) + \nabla(1,\ -2)$

$$= \nabla(-2,\ -3,\ -4,\ 4).$$

9. *Умноженіе и дѣленіе.*

Пусть $\qquad x = \nabla(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n - 1,\ a_n)$

требуется найти $\ \theta b \nabla(a_1 \cdots a_n);$

гдѣ $\theta = \pm 1$, b вида $\frac{A}{B}$.

$$(\varphi)x = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Сдѣлавъ $x = \frac{y}{\theta b}$, получимъ

$$F(y) = y^n + \theta b a_1 y^{n-1} + b^2 a_2 y^{n-2} + \theta b^3 a_3 y^{n-3}$$
$$+ b^4 a_4 y^{n-4} + \cdots\cdots + \theta^{n-1} b^{n-1} a_{n-1} y + \theta^n b^n a_n,$$

откуда
$$\theta b \nabla (a_1 a_2 \cdots a_n)$$
$$= \nabla (\theta b a_1,\ b^2 a_2,\ \theta b^3 a_3,\ b^4 a_4 \cdots\cdots$$
$$\theta^{n-1} b^{n-1} a_{n-1},\ \theta^n b^n a_n) \cdots\cdots (3).$$

Пусть $\theta = -1$, будетъ: при n четномъ

$$-b \nabla (a_1 a_2 \cdots a_n) = \nabla (-b a_1,\ b^2 a_2,\ -b^3 a_3 \cdots$$
$$-b^{n-1} a_{n-1},\ b^n a_n),$$

при n нечетномъ

$$-b \nabla (a_1 a_2 \cdots a_n) = \nabla (-b a_1,\ b^2 a_2,\ -b^3 a_3 \cdots$$
$$b^{n-1} a_{n-1},\ -b^n a_n).$$

Когда $\theta = +1$, то $b \nabla (a_1 \ldots a_n) = \nabla (b a_1,\ b^2 a_2 \ldots b^n a_n)$.

Напримѣръ: пусть

$$\varphi(x) = x^3 - 3x^2 - 2,\ b = 2,\ \theta = 1,$$
$$2 \nabla (-3,\ 0,\ -2) = \nabla (-6,\ 0\ -16).$$

получимъ $\qquad F(z) = z^3 - 6z^2 - 16.$

Точно также имѣя $\nabla (3,\ 9,\ -27)$ или $\varphi(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ и $\theta b = -\frac{1}{3}$, получимъ

$$-\tfrac{1}{3} \nabla (3,\ 9,\ 27) = \nabla (-1,\ 1,\ +1)$$

или $\qquad F(z) = z^3 - z^2 + z + 1.$

Ежели имѣемъ корень однородной функціи

$$x = \nabla (au,\ -bu^2,\ -cu^3,\ du^4),$$

т. е. $\varphi(x) = x^4 + au \cdot x^3 - bu^2 \cdot x^2 - cu^3 \cdot x + du^4$; то сдѣлавъ $\theta b = \frac{1}{u}$, получимъ

$$y = \tfrac{1}{u} \nabla (au,\ -bu^2,\ -cu^3,\ +du^4)$$
$$= \nabla (a,\ -b,\ -c,\ +d).$$

И такимъ образомъ неизвѣстное u, исключимъ и найдемъ

$$\nabla(au, -bu^2, -cu^3, +du^4)$$
$$= u\nabla(a, -b, -c, d).$$

Напримѣръ, пусть $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=1$,

$$\varphi(x) = x^4 + u\cdot x^3 - 2u^2x^2 - u^3x + u^4,$$

то $$x = u\nabla(1, -2, -1, 1),$$

и найдется чрезъ корни

$$F(y) = y^4 + y^3 - 2y^2 - y + 1,$$

которое рѣшивъ, по извѣснымъ уже способамъ, получимъ всѣ четыре корня

$$x = +u, \ -u, \ u\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \ u\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Легко найти

$$z = \frac{1}{x} = \frac{1}{\nabla(a_1 a_2 \ldots a_n)}$$
$$= \nabla\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \frac{a_{n-3}}{a_n} \ldots \frac{a_2}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \frac{1}{a_n}\right) \text{*)}.$$

Чтобъ истребить знаменателя подъ ∇, стоитъ только z умножить и раздѣлить на $\theta b = a_n$ (3), и будетъ

$$\frac{1}{\nabla(a_1 a_2 \ldots a_n)} = \frac{1}{a_n}\cdot\nabla\left(a_{n-1}, a_n a_{n-2}, a_n^2 a_{n-3} \ldots\right.$$
$$\left. a_n^{n-2} a_1, a_n^{n-1}\right)$$

---

*) Это получимъ, подставя въ $\varphi(x)$ на мѣсто x, $\frac{1}{z}$.

и на оборотъ

$$\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)$$

$$= \frac{a^n}{\nabla(a_{n-1},\ a_n a_{n-2},\ a_n^2 a_{n-3} \ldots a_1 a_n^{n-2},\ a_n^{n-1})}.$$

т. е. всегда можемъ перевести ∇ изъ числителя въ знаменатель и обратно.

Ежели требуется умножить одно ∇ на другое ∇, наприм. $\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)$, умножить на $\nabla(b_1 b_2 \cdots b_m)$, то взявъ всѣ n значеній перваго

$$\nabla_1 \nabla_2 \nabla_3 \cdots\cdots \nabla_n,$$

и всѣ m значеній втораго

$$\nabla'_1 \nabla'_2 \nabla'_3 \cdots\cdots \nabla'_m,$$

по общему правилу (7) составимъ множители

$$(z - \nabla_1 \cdot \nabla_1' \cdot)(z - \nabla_1 \nabla'_2)(\cdots)\cdots(z - \nabla_2 \nabla'_1)(\cdots)$$
$$(z - \nabla_n \nabla'_1)(\cdots)\cdots(z - \nabla_n \nabla'_m).$$

Перемножимъ самымъ дѣломъ и примѣчая, что всѣхъ множителей будетъ mn, получимъ

$$F(z) = z^{mn} - A_1 z^{mn-1} + A_2 z^{mn-2} - \ldots \mp A_{mn-1} z \pm A_{mn},$$

откуда $\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)\nabla(b_1 b_2 \cdots b_m)$

$$= \nabla(-A_1,\ A_2 \cdots \mp A_{mn-1},\ \pm A_{mn}).$$

Точно также можемъ раздѣлить одно ∇ на другое и вобще найти

$$z = f(\nabla, \nabla') = \nabla(-A_1 \cdots \pm A\mu) \text{ *)}$$

гдѣ μ есть произведенiе числа значенiй $\nabla'(\cdots)$ на число значенiй $\nabla(\cdots)$. Тутъ кромѣ продолжительнаго вычисленiя и сложнаго письма, нѣтъ ни малѣйшей трудности. Въ послѣдствiи покажутся формулы, облегчающiя вычисленiе коэфицiентовъ

$$A_1 A_2 \cdots\cdots A\mu.$$

10. *Возвышенiе* въ *степени* и *извлеченiе радикаловъ*.

Эти оба дѣйствiя надъ ∇ произведемъ по общему правилу, также легко, какъ и всѣ прежнiя.

---

*) Наприм. чтобъ составить уравненiе „въ квадратахъ разностей" корней данной функцiи $\varphi(x)$ n-й степени, которой корень

$$x = \nabla(a_1 a_2 \ldots a_n);$$

возмемъ всѣ значенiя ∇:

$$\nabla_1 \nabla_2 \nabla_3 \ldots \nabla_n;$$

составимъ всѣ возможныя разности:

$$\nabla_1 - \nabla_2 = a, \quad \nabla_2 - \nabla_1 = -a;$$

и т. д. счетомъ ихъ, $n(n-1)$; напишемъ множители

$$(z-a)(z+a) = z^2 - a^2 = y - a^2$$

$$(z-b)(z+b) = z^2 - b^2 = y - b^2$$

$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$(z-\nu)(z+\nu) = z^2 - \nu^2 = y - \nu^2$$

произведенiе

$$(y-a^2)(y-b^2)(\ldots)\ldots(y-\nu^2)$$

$$= y^{\frac{n(n-1)}{2}} - ay^{\frac{n(n-1)}{2}-1} + \cdots \pm \varepsilon$$

дастъ искомое уравненiе въ квад. разностей, о которомъ говорили въ концѣ X. лекцiи.

Чтобъ найти

$$z = [\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)]^m,$$

гдѣ m число цѣлое, дробное, положительное или отрицательное, назовемъ

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$$

всѣ величины ∇, и получимъ

$$F(z) = (z - x_1^m)(z - x_2^m)(z - x_3^m)(\cdots)\cdots(z - x_n^m)$$

$$= z^n - (x_1^m + x_2^m + \cdots x_n^m) z^{n-1} + (x_1^m x_2^m$$

$$+ \cdots + x_2^m x_3^m + \cdots + x^m_{n-1} x_n^m) z^{n-2} - \cdots$$

$$\pm x_1^m x_2^m x_3^m \cdots x_n^m$$

$$= z^n - X_1 z^{n-1} + X_2 z^{n-2} - \cdots \pm X_n;$$

откуда

$$[\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)]^m = \nabla(-X_1, +X_2, -X_3 \cdots \pm X_n).$$

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ. Пусть $m = \frac{1}{2}$, то

$$z = \sqrt{\nabla(a_1 a \cdots {}_2 a_n)}$$

$$= \nabla(0, a_1, 0, a_2, 0, a_3 \cdots 0, a_{n-1}, 0, a_n),$$

потому что въ

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

сдѣлавъ $z = \sqrt{x}$, или $x = z^2$, получимъ

$$F(z) = z^{2n} + 0 \cdot z^{2n-1} + a_1 z^{2n-2} + 0 \cdot z^{2n-3} + \cdots\cdots$$

$$+ a^{n-1} z^2 + 0 \cdot z + a_n.$$

Степень функціи удвоивается; число мнимыхъ ∇ въ $F(z)$ легко разсчитаемъ по знакамъ коэфиціентовъ, смѣжныхъ съ уничтожившимися.

Когда вообще $m = \frac{1}{\nu}$, то

$$\sqrt[\nu]{\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)} = \nabla\,(0_\nu,\ a_1,\ 0_\nu,\ a_2,\ 0_\nu,\ a_3 \cdots 0_\nu,\ a_n)$$

степень $F(z)$ будетъ $n\nu$; 0_ν замѣняетъ ν нулей, стоящихъ рядомъ.

Когда $m = -1$, то

$$[\nabla(a_1 a_2 \cdots a_n)]^{-1} = \frac{1}{a_n}\nabla(a_{n-1},\ a_n a_{n-2},\ a_n^2 a_{n-3} \cdots a_n^{n-2} a_1,\ a_n^{n-1});$$

напримѣръ:

$$[\nabla(-6,\ 0,\ 2,\ -2)]^{-1} = \nabla(-1,\ 0,\ 3,\ -\tfrac{1}{2})$$
$$= \tfrac{1}{2}\nabla(-2,\ 0,\ 24,\ -8).$$

Такимъ образомъ отъ

$$\varphi(x) = x^4 - 6x^3 + 2x - 2$$

мы перешли къ

$$F(z) = z^4 - 2z^3 + 24z - 8.$$

Также легко доказать, по общему правилу (7), что напримѣръ

$$[\nabla(a_1 a_2 a_3)]^2 = \nabla[-(a_1^2 - 2a_2),\ a_2^2 - 2a_1 a_3,\ -a_3^2];$$

$$[\nabla(-1,\ 0,\ -3)]^2 = \nabla(1,\ -6,\ -9);$$

т. е. квадраты корней уравненія

$$x^3 - x^2 - 3,$$

равны простымъ корнямъ уравненія

$$z^3 - z^2 - 6z - 9 \text{ и т. д.}$$

Не станемъ больше разпространять подробности Алгебрическихъ дѣйствій надъ „рѣшеніемъ уравненій“ или надъ ∇. Всякой легко самъ выполнить надъ нимъ не только простыя, но даже сложныя Алгебрическія дѣйствія.

„Преобразованія и сокращенія“ въ различныхъ случаяхъ, смотря по надобности, будутъ уже простыя примѣненія всего до сихъ поръ изложеннаго; мы на нихъ не остановимся, цѣлъ наша достигнута:

Мы видѣли главнѣйшія свойства знака ∇; всѣ эти свойства, вмѣстѣ взятыя, составляють полную теорію рѣшенія уравненій; умѣемъ производить это *дѣйствіе:* надъ числами въ числахъ, надъ буквами въ буквахъ; умѣемъ надъ этимъ дѣйствіемъ производить всѣ другія Алгебрическія дѣйствія, преобразованія и сокращенія; въ слѣдующей части увидимъ, какимъ образомъ „это дѣйствіе“ войдетъ, на ровнѣ съ другими простыми величинами, въ составъ самыхъ сложныхъ Алгебрич. функцій, и что всего важнѣе, изслѣдованіе свойствъ самой обширнѣйшей Алгебрической ирраціональной функціи, которой почти и написать нельзя, сведемъ на изслѣдованіе ∇, и въ тоже время будемъ имѣть дѣло, вмѣсто ирраціональностей, съ одними функціями раціональными.

Далѣе, мы будемъ *дифференцировать* ∇; и наконецъ въ Трансцендентномъ Анализѣ, гдѣ вполнѣ увидимъ всю его важность, будемъ его интегрировать.

И такъ теперь всякой долженъ согласиться въ справедливости доказаннаго Г. Остроградскимъ, о чемъ еще въ началѣ IV. лекціи мы достаточно объяснились, именно: что „рѣшеніе уравненій", и *численныхъ* и *буквенныхъ вообще кончено*, что это особое и самое важнѣйшее Алгебрическое дѣйствіе, что извлеченіе радикаловъ есть только частный его случай; и потому-то рѣшать уравненія посредствомъ радикаловъ „вообще" не возможно (кромѣ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ); это и докажется рѣшительнымъ образомъ въ слѣдующихъ лекціяхъ. Должно согласиться и въ томъ, что уравненія вообще рѣшаются посредствомъ производныхъ своихъ функцій и коэфиціентовъ; что для „отдѣленія" корней необходимы всѣ производныя, отъ первой до послѣдней *); что для „вычисленія" корней достаточно двухъ f, и f' (форм. 17, лекц. X.); что между вещественными корнями всѣхъ производныхъ, и корнями начальной, непремѣнно есть зависимость (лекц.

*) Хотя по Штурму требуется только одна производная; но его остатки играютъ туже роль, что у Фурье производныя функціи, число тѣхъ и другихъ одинаково. Соединеніе этихъ двухъ способовъ обѣщаетъ новое упрощеніе отдѣленія корней.

V., табл. 3 и далѣе), точно также, какъ есть зависимость между самыми функціями; и если найти эту зависимость, то рѣшеніе начальной функціи сведется на рѣшеніе ея производныхъ, постепенно понижающихся; что численная величина корней этихъ производныхъ, увеличивается вмѣстѣ съ увеличеніемъ показателей степени функцій; что отъ познанія свойствъ производныхъ функцій, зависитъ рѣшеніе уравненій; что наконецъ, еслибъ мы могли выразить буквенною формулою то, что производимъ въ числахъ, при отдѣленіи корней, особливо по способу Фурье, то это было бы только упрощеніе, усовершенствованіе рѣшенія уравненій, конечно весьма важное, но совсѣмъ не „новое открытіе“ рѣшенія уравненій, которое уже сдѣлано, и котораго напрасно ожидаютъ Гг. Радикалисты.

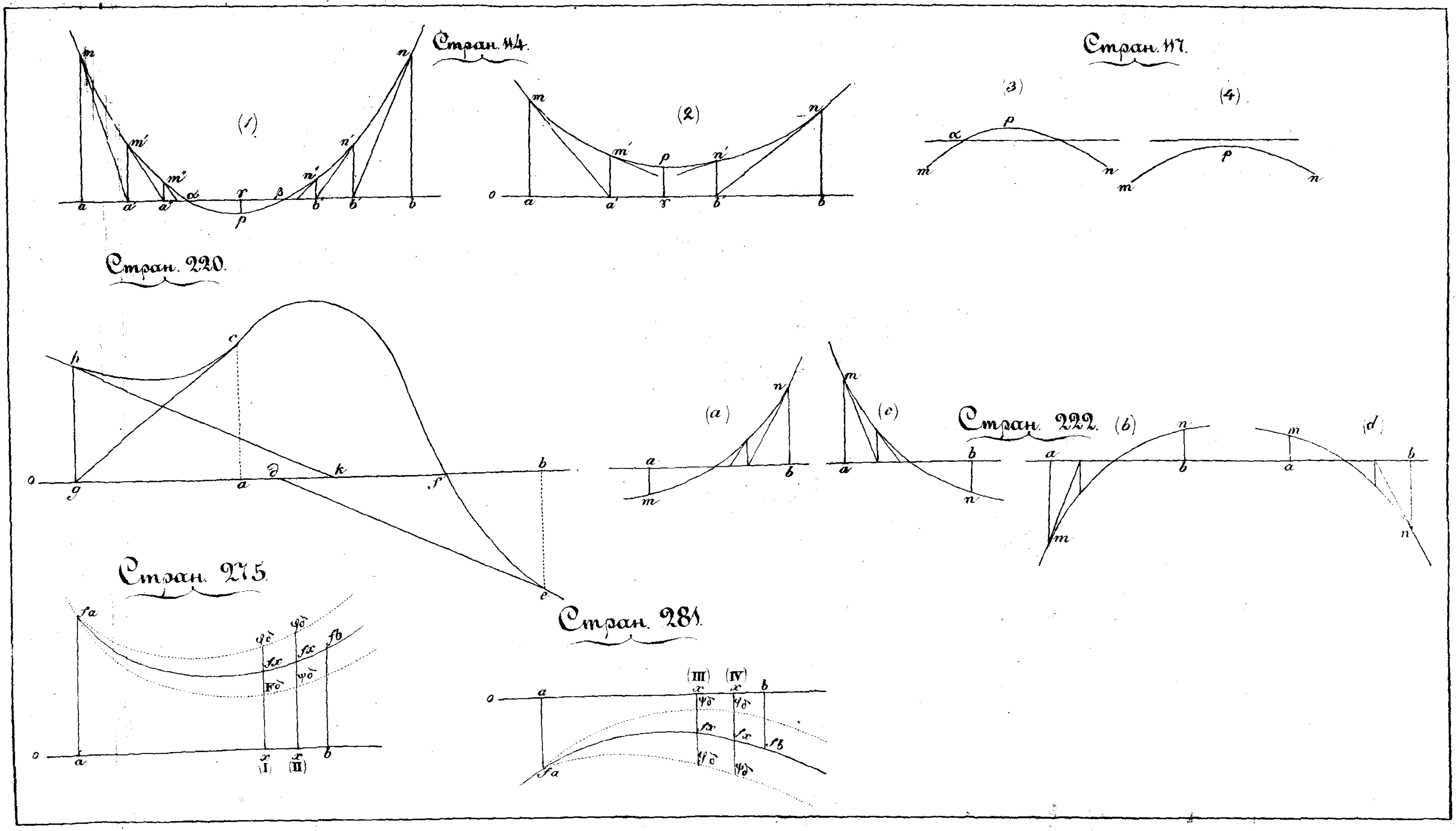
Въ тоже время должно согласиться, что Г. Остроградскій, введя въ Алгебру знакъ ∇, и объяснивъ его свойства, сдѣлалъ ей великую услугу, которую вполнѣ оцѣнимъ только въ Трансцендентномъ Анализѣ; и однимъ этимъ расширилъ предѣлы его, давъ полную возможность дѣйствовать тамъ, гдѣ радикалисты, за неимѣніемъ радикальнаго рѣшенія въ буквахъ, непремѣнно бы остановились. Да и къ счастью, что этаго радикальнаго рѣшенія нѣтъ: ежели большаго труда стоитъ вычислить одинъ кубичный корень, не говоря о корнѣ четвертой степени, посредствомъ радикаловъ; ежели мы встрѣтимъ почти непреодолимыя трудности, введя, вмѣсто кубическаго или биквадратнаго корня, его радикальное выраженіе, въ какую нибудь функцію; то что бы было, еслибы понадобилось имѣть дѣло съ радикальными корнями высшихъ уравненій! — Тогда какъ теперь ∇ избавитъ насъ отъ всякаго дѣла съ ирраціональностями, и приведетъ къ весьма важнымъ упрощеніямъ Анализа Алгебрическаго и Трансцендентнаго.

Конецъ первой части.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	строк.		Напечатано.	Слѣдовало напечатать.
4	11	сверху	x_n	x^n
5	16	„	cx_k	cx^k
5	1	„	cx_k	cx^k
9	3	„	lx_n	lx^n
11	17	„	$\frac{h}{1.2\ldots n}$	$\frac{h^n}{1.2\ldots n}$
24	10	„	$\overset{2k}{\sqrt{\alpha+\beta i}}$	$\sqrt[2^k]{\alpha+\beta i}$
25	9	„	$x^{2^k}.p$	$x^{2^k.p}$
—	10	„	yp	y^p
27	6	„	$x2k-1$	x^{2^k-1}
28	1	„	$x2k$	x^{2^k}
42	5	„	$f(x)$	$f(x_{,})$
45	19	снизу	$x-x^n$	$x-x_n$
48	8	сверху	$(x-x_3\mathrm{P})$	$(x-x_3)\mathrm{P}$
—	6	снизу	xn	x^n
—	1	„	$\mp$	$\pm$
49	2	сверху	$\mp$	$\pm$
50	1	„	$(x-{}_3)\psi'(x)+p\psi(x)$	$[(x-x_3)X'(x)+pX(x)]$
55	7	„	$f_{\text{IV}}(x)$	f_{IV}
57	20	„	$\frac{f_{,}(x)}{\mathrm{D}}$	$\frac{f_{,}(x)}{\mathrm{D}_{,}}$
58	16	„	$\frac{\mathrm{A}_{,,}}{\mathrm{D}_{,,}}$	$\frac{\mathrm{A}_{,,}}{d_{,,}}$
62	1 и 2	„	$a+ki$	$a+bi$
—	7	снизу	$p'q-q'p$	$(p'q-q'p)i$
64	3	„	уравненіями	количествами.
82	9	сверху	$27b^2 4a^3<0$;	$27b^2+4a^3<0$;
155	5	снизу	$f^{\circ}(\alpha)=0$,	$f'(\alpha)=0$,
158	15	„	10.75	10.77
162	2	сверху	но меньше ли	но меньше или
166	3	снизу	отъ f°	отъ F°
172	1	сверху	$=\frac{4}{7}=3.570$	$=3\frac{4}{7}=3.571$

Стран.	Строк.	Напечатано.	Слѣдовало напечатать.
172	2 сверху	$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{9}{61} = 3.562$	$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}} = 3.\frac{5}{9} = 3.555$
175	4 сверху	$\frac{5}{9} = 0.565$	$\frac{5}{9} = 0.555$
176	6 снизу	$x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 9x + 2$	$x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
196	10 „	$AP_i{}^{n-1} + A_1 P_i{}^n Q_i$,	$AP_i{}^n + A_1 P_i{}^{n-1} Q_i$
203	4 снизу	$\left(-\frac{f''}{2f'} + \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}}\right) < 1$,	$\left(-\frac{R}{2N} + \frac{Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}}\right) < 1$
—	1 „	$\frac{f'}{f}$	$\frac{N}{M}$
204	9 „	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$
208	4 сверху	$-\frac{f''}{2f'} + \frac{Q_i Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}}$, $= -\frac{2}{-29} + \frac{2}{-1} = -\frac{17}{18}$	$-\frac{R}{2N} + \frac{Q_{i-1}}{(-1)^{i+1}}$ $= -\frac{2}{-2.(9)} + \frac{1}{-1}$ $= -\frac{16}{18}$
224	2 „	$\alpha' =$	$\alpha =$
—	3 „	предѣлъ α'	предѣлъ α
226	4 „	$\alpha' = \alpha + \frac{-f(\alpha)}{f(\beta)}$	$\alpha' = \alpha + \frac{-f(\alpha)}{f'(\beta)}$
257	10 „	$\frac{f''b}{2} z^2 - f'b + fb = 0$,	$\frac{f''b}{2} z^2 - zf'b + f'(b) = 0$,
277	6 „	$F(\delta)$	$F_\lambda(\delta)$
—	10 „	$\varphi(\delta)$	$\varphi_\lambda(\delta)$.


Стран. 114.
(1)
(2)
Стран. 117.
(3)
(4)
Стран. 220.
Стран. 222.
(a)
(b)
(c)
(d)
Стран. 275.
Стран. 281.
(I)
(II)
(III)
(IV)